



CENTRO NACIONAL  
DE EVALUACIÓN PARA  
LA EDUCACIÓN SUPERIOR, A.C.

# formulario

EXAMEN GENERAL PARA EL EGRESO DE LA LICENCIATURA  
EN INGENIERÍA ELECTRÓNICA

Dirección del Área de los EGEL

ENERO • 2017



CENTRO NACIONAL  
DE EVALUACIÓN PARA  
LA EDUCACIÓN SUPERIOR, A.C.

# formulario

EXAMEN GENERAL PARA EL EGRESO DE LA LICENCIATURA  
EN INGENIERÍA ELECTRÓNICA

Dirección del Área de los EGEL

ENERO • 2017

Este Formulario es un instrumento de apoyo para quienes sustentarán el Examen General para el Egreso de la Licenciatura en Ingeniería Electrónica (EGEL-IELECTRO) y está vigente a partir de agosto de 2015.

El Formulario para el sustentante es un documento cuyo contenido está sujeto a revisiones periódicas. Las posibles modificaciones atienden a los aportes y críticas que hagan los miembros de las comunidades académicas de instituciones de educación superior de nuestro país, los usuarios y, fundamentalmente, las orientaciones del Consejo Técnico del examen.

El Ceneval y el Consejo Técnico del EGEL-IELECTRO agradecerán todos los comentarios que puedan enriquecer este material. Sírvase dirigirlos a:

Dirección del Área de los Exámenes  
Generales para el Egreso de la Licenciatura (DAEGEL)  
Dirección del Programa de Evaluación de Egreso (EGEL) Diseño, Ingenierías y  
Arquitectura  
Centro Nacional de Evaluación para la Educación Superior, A. C.  
Av. Camino al Desierto de los Leones (Altavista) 37  
Col. San Ángel, Del. Álvaro Obregón,  
C.P. 01000, México, CDMX  
Tel: 01 (55) 5322-9200, ext. 5103  
<http://www.ceneval.edu.mx>  
Email: [eloin.alarcon@ceneval.edu.mx](mailto:eloin.alarcon@ceneval.edu.mx)



## **Directorio**

### **Dirección General**

Dr. en Quím. Rafael López Castañares

### **Dirección del Área de los Exámenes Generales para el Egreso de la Licenciatura (DAEGEL)**

M. en Ed. Luz María Solís Segura

### **Encargado del Despacho de la Dirección del Programa de Evaluación de Egreso (EGEL) en Diseño, Ingenierías y Arquitectura**

Ing. Eduardo Ramírez Díaz

### **Coordinación del Examen General para el Egreso de la Licenciatura en Ingeniería Electrónica (EGEL-IELECTRO)**

Ing. Eloín Alarcón Maldonado

## Consejo Técnico

### Representantes de instituciones educativas

M. en C. Arnulfo Luis Ramos  
**Benemérita Universidad Autónoma de Puebla**

Dr. Jorge de la Torre y Ramos  
**Universidad Autónoma de Zacatecas**

M. en C. Arturo Javier Escoto Méndez  
**Centro de Enseñanza Técnica y Superior**

Dr. Ramón García Hernández  
**Universidad Autónoma del Carmen**

M. en C. Jorge Carlos Canto Esquivel  
**Instituto Tecnológico de Mérida**

Dr. Armando Rafael San Vicente Cisneros  
**Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey**

M. en I. Carlos Roberto González  
Escarpetas  
**Instituto Tecnológico de Veracruz**

Dr. Omar Jacobo Santos Sánchez  
**Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo**

Dr. Edgar Omar López Caudana  
**Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey**

M. en C. Eduardo Rodríguez Ángeles  
**Universidad Autónoma del Estado de México**

M. en C. Gabriel Domínguez Sánchez  
**Universidad Autónoma de Aguascalientes**

M. en C. Juan Carlos Aldaz Rosas  
**Universidad de Guadalajara**

M. en C. Marco Antonio Félix Lozano  
**Universidad Autónoma de Baja California**

Mtro. Víctor A. Gutiérrez Martínez  
**Cámara Nacional de la Industria Electrónica de Telecomunicaciones y Tecnologías de la Información**

M. en C. David García Chaparro  
**Universidad Autónoma de Ciudad Juárez**

M. en C. Mauricio Alberto Ortega Ruiz  
**Universidad del Valle de México**

Dr. José Luis Tecpanecatí Xihuitl  
**Universidad Autónoma de San Luis Potosí**

M. en I. José Antonio Sánchez Flores  
**Universidad de la Salle Bajío**

Dr. Gerardo Romero Galván  
**Universidad Autónoma de Tamaulipas**

Dr. Armando Gregorio Rojas Hernández  
**Universidad de Sonora**

Dr. Miguel Ángel Carrasco Aguilar  
**Universidad Autónoma de Tlaxcala**

Dr. Luis Alfredo González López  
**Universidad de Sonora**

## Contenido

<b>Administración de sistemas electrónicos.....</b>	<b>11</b>
<b>Operación y mantenimiento de sistemas electrónicos.....</b>	<b>11</b>
Inversión inicial .....	11
Tasa mínima aceptable de rendimiento .....	11
Tasa mínima aceptable de rendimiento mixta .....	11
Valor presente neto (con TMAR).....	12
Valor presente neto (con anualidad e interés).....	12
Tasa interna de retorno.....	12
Periodo de recuperación de la inversión .....	13
Punto de equilibrio en ventas .....	13
Costo beneficio .....	13
<b>Ingeniería económica.....</b>	<b>14</b>
Interés simple .....	14
Interés compuesto .....	14
Valor futuro pago único.....	14
Valor presente pago único.....	14
Cantidad compuesta serie uniforme .....	14
Fondo de amortización .....	15
Recuperación del capital de una serie uniforme .....	15
Valor presente de una serie uniforme .....	15
Series de gradiente.....	15
Tasa efectiva de interés anual.....	15
Capitalización continua.....	15
Definición de "e" .....	15
Pagos continuos .....	16
Tasa mixta .....	16
<b>Métodos de análisis de inversiones.....</b>	<b>17</b>
Valor presente .....	17
Valor futuro .....	17
Costo anual uniforme equivalente (CAUE).....	17
Serie uniforme equivalente .....	17
Recuperación de capital .....	17
Retiro y reemplazo.....	17
Tasa interna de retorno .....	17
Periodo de recuperación.....	17
Razón costo-beneficio .....	18
<b>Diseño e integración de sistemas electrónicos.....</b>	<b>19</b>
<b>Construcción e implementación de sistemas electrónicos.....</b>	<b>19</b>
Comunicaciones .....	19
Radiofrecuencia .....	19
Parámetros de dispersión.....	23

Líneas de transmisión .....	25
Impedancia característica .....	25
Línea de transmisión de tipo microcinta .....	26
Impedancia característica de líneas de microcinta paralelas .....	26
Constante de propagación .....	27
Velocidad de propagación .....	27
Tiempo de retardo .....	27
Ondas estacionarias .....	27
Coeficiente de reflexión .....	27
Relación de onda estacionaria (SWR) y el coeficiente de reflexión ( $\Gamma$ ) .....	28
Impedancia de entrada ( $Z_{in}$ ) .....	28
Tabla de parámetros distribuidos .....	29
Antenas .....	30
Ganancia directiva .....	30
Resistencia de radiación.....	30
Ancho de banda de la antena.....	30
Longitud efectiva.....	30
Área efectiva.....	30
Densidad de potencia radiada.....	30
Impedancia característica del medio.....	30
Potencia total radiada.....	30
Directividad.....	31
Lóbulo.....	31
Ancho del haz principal.....	31
Intensidad del campo.....	31
Conectores .....	32
RJ45.....	32
RJ11.....	33
VGA.....	34
USB.....	35
DB9.....	35
DB-25.....	36
IEEE.488.....	37
RS-232 DB9.....	38
RS – 422/485 DB – 9.....	39
<b>Formulario general.....</b>	<b>40</b>
Matemáticas .....	40
Álgebra.....	40
Álgebra lineal.....	46
Cálculo diferencial.....	48
Cálculo integral.....	53
Geometría.....	63
Geometría analítica plana.....	65
Geometría analítica del espacio.....	67
Trigonometría.....	71
Números complejos.....	77
Análisis vectorial.....	79
Fracciones racionales.....	86
Series de Fourier.....	87
Transformada de Fourier.....	91
Transformada de Laplace.....	95

Probabilidad y estadística.....	100
Física .....	106
Mecánica .....	106
Electricidad y magnetismo.....	116
Química .....	121
Análisis de circuitos eléctricos.....	123
Ley de Ohm con fasores.....	123
Voltaje y corriente en elementos reactivos(con condiciones iniciales iguales a cero) .....	123
Divisor de corriente.....	124
Divisor de voltaje .....	124
Leyes de Kirchhoff .....	125
Potencia.....	126
Resonancia RLC serie.....	127
Resonancia RLC paralelo.....	128
Circuitos excitados con señales senoidales de diferentes frecuencias .....	129
Impedancia y admitancia de una red pasiva de dos terminales.....	130
Teoremas de redes.....	131
Parámetros de dos puertos .....	133
Respuesta transitoria.....	135
Función de transferencia .....	141
Diagramas de Bode asintóticos.....	142
Sistemas acoplados.....	143
Sistemas trifásicos.....	144
Potencia trifásica .....	146
Electrónica analógica.....	147
Diodo de propósito general .....	147
Diodo Zener .....	147
Rectificadores de media onda y onda completa (fuentes de alimentación).....	148
Transistor de unión bipolar (BJT) .....	151
Transistor de efecto de campo (FET).....	161
Transistor MOSFET.....	168
Amplificadores operacionales.....	169
Filtros activos.....	175
Filtros pasivos.....	179
Convertidores .....	180
Amplificadores de corriente .....	182
Electrónica digital.....	186
Algebra de Boole .....	186
Mapa de Karnaugh .....	187
Conversión de decimal a BCD natural, BCD Aiken y BCD exceso 3.....	188
Circuitos digitales básicos .....	188
Flip-flops .....	190
Electrónica de potencia.....	192
Fórmulas básicas.....	192
Dispositivos.....	194
Teoría de control.....	204
Terminología de la ingeniería de control .....	204
Modelos de control .....	204
Tipos de respuesta .....	205

Regla de Mason.....	209
Controladores .....	210
Comunicaciones .....	213
Osciladores.....	213
Modulación y demodulación AM-FM .....	218
Decibel .....	219
Oscilador de relajación UJT .....	220
Oscilador de relajación PUT .....	221
Instrumentación .....	222
Valor promedio .....	222
El valor rms.....	222
Errores en medición.....	222
Puentes de Wheatstone .....	223
Puente de Kelvin.....	224
Ruido térmico o ruido de Jhonson .....	224
Termopar .....	224
Termistor.....	226
Sensores.....	227
Transformada Z .....	232
Tablas adicionales de datos prácticos.....	233

**Administración de sistemas electrónicos****Operación y mantenimiento de sistemas electrónicos****Inversión inicial**

$$II = CO + CP + CA$$

donde:

II = Inversión inicial

CO = Costos de operación

CP = Costos de producción

CA = Costos de administración y ventas

**Tasa mínima aceptable de rendimiento**

$$TMAR = (\mu * i)^n$$

donde:

TMAR = Tasa mínima aceptable de rendimiento

$\mu$  = Monto

$i$  = Tasa de interés

$n$  = Número de periodos a considerar

**Tasa mínima aceptable de rendimiento mixta**

$$TMAR_{mixta} = [I_1 + PR_1 + \%I_1 + \%PR_1] + [I_2 + PR_2 + \%I_2 + \%PR_2] + \dots + [I_n + PR_n + \%I_n + \%PR_n]$$

donde:

TMAR<sub>mixta</sub> = Tasa mínima aceptable de rendimiento mixta

$I_n$  = Inflación

PR<sub>n</sub> = Premio al riesgo

$\%I_n$  = Inflación  $\div$  100

$\%PR_n$  = Premio al riesgo  $\div$  100

**Formulario para el sustentante del**

Examen General para el Egreso de la Licenciatura en Ingeniería Electrónica (EGEL-IELECTRO)

**Dirección del Programa de Evaluación de Egreso (EGEL) Diseño, Ingenierías y Arquitectura****Valor presente neto (con TMAR)**

$$VPN = -S_0 + \sum_{t=1}^n \frac{St}{(1+i)^t}$$

donde:

VPN = Valor presente neto

 $S_0$  = Inversión inicial $St$  = Flujo de efectivo neto del periodo t

N = Número de periodos de la vida del proyecto

i = Tasa de recuperación mínima atractiva

**Valor presente neto (con anualidad e interés)**

$$VPN = -P + A \left[ \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} \right] + VS$$

donde:

VPN = Valor presente neto

P = Inversión inicial

A = Anualidad

i = Tasa de interés

VS = Valor de salvamento al final del periodo n

n = Número de periodos

**Tasa interna de retorno**

$$TIR = \sum_{t=1}^n \frac{FNE_t}{(1+i)^t} + \frac{VS}{(1+i)^n}$$

donde:

TIR = Tasa interna de retorno

FNE = Flujo neto de efectivo del periodo n, o beneficio neto después de impuesto más depreciación

VS = Valor de salvamento al final del periodo n

i = Tasa de interés

n = Número de periodos

**Periodo de recuperación de la inversión**

$$ROI = \frac{UN}{I}$$

donde:

ROI = Periodo de recuperación de la inversión

UN = Utilidad neta

I = Inversión

**Punto de equilibrio en ventas**

$$PE = \frac{CF}{1 - \frac{CV}{VT}}$$

donde:

PE = Punto de equilibrio

CF = Costos fijos

CV = Costos variables

VT = Ventas totales

**Costo beneficio**

$$\frac{B}{C} = \frac{B-D}{C}$$

donde:

B = Beneficios asociados al proyecto

C = Costo neto del proyecto

D = Valor de las desventajas

**Formulario para el sustentante del**

Examen General para el Egreso de la Licenciatura en Ingeniería Electrónica (EGEL-IELECTRO)

**Dirección del Programa de Evaluación de Egreso (EGEL) Diseño, Ingenierías y Arquitectura****Ingeniería económica**

Glosario de términos para ingeniería económica

I:	Inversión	$\hat{A}$ :	Factor de pago continuo
n:	Periodo	RC:	Factor de recuperación de capital
i:	Tasa de interés	Vs:	Valor de salvamento
P:	Valor presente	$\Theta$ :	Tasa mixta
F:	Valor futuro	Pr:	Periodo de recuperación
A:	Serie uniforme	B:	Beneficio
G:	Gradiente	C:	Costo
$i_{ef}$ :	Tasa efectiva	D:	Desventaja
R:	Tasa de interés divisible	e:	Base de logaritmos neperianos
m:	Periodo de intervalo		

**Interés simple**

$$I = niP$$

**Interés compuesto**

$$i = \sqrt[n]{\frac{F}{I}} - 1$$

**Valor futuro pago único**

$$F = P(1+i)^n$$

**Valor presente pago único**

$$P = F \frac{1}{(1+i)^n}$$

**Cantidad compuesta serie uniforme**

$$F = A \left[ \frac{(1+i)^n - 1}{i} \right]$$

**Fondo de amortización**

$$A = F \left( \frac{i}{(1+i)^n - 1} \right)$$

**Recuperación del capital de una serie uniforme**

$$A = P \left( \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} \right)$$

**Valor presente de una serie uniforme**

$$P = A \left( \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} \right)$$

**Series de gradiente**

$$A = G \left( \frac{1}{\frac{i - n}{(1+i)^n - 1}} \right)$$

**Tasa efectiva de interés anual**

$$i_{ef} = \left( 1 + \frac{r}{m} \right)^m - 1$$

**Capitalización continua**

$$i = \lim_{m \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{r}{m} \right)^m - 1 = e^r - 1$$

**Definición de “e”**

$$i = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = e$$

$$\frac{F}{P} = e^m$$

$$\frac{P}{F} = e^{-m}$$

$$\frac{F}{A} = \frac{(e^m - 1)}{(e^r - 1)}$$

$$\frac{P}{A} = \frac{(1 - e^{-m})}{(e^r - 1)}$$

$$\frac{A}{G} = \left(\frac{1}{1 - e^{-m}}\right) - \left(\frac{n}{e^m - 1}\right)$$

### Pagos continuos

$$\frac{F}{\hat{A}} = \frac{(e^m - 1)}{r}$$

$$\frac{P}{\hat{A}} = \frac{(e^m - 1)}{re^m}$$

### Tasa mixta

$$\theta = \frac{(i - \lambda)}{(1 - \lambda)}$$

**Métodos de análisis de inversiones****Valor presente**

$$Vp = \sum_{j=0}^n \text{Flujo}(P / F, i, j)$$

**Valor futuro**

$$Vp = \sum_{j=0}^n \text{Flujo}(F / P, i, j)$$

**Costo anual uniforme equivalente (CAUE)**

$$Vp = \left( \sum_{j=0}^n \text{Flujo}(P / F, i, j) \right) * (A / P, i, j)$$

**Serie uniforme equivalente**

$$SAUE = -CAUE$$

**Recuperación de capital**

$$CAUE = -SAUE = RC$$

$$(P - V_s) \left( \frac{A}{P, i, n} \right) + iV_s$$

**Retiro y reemplazo**

$$CAUE(j) = RC(j) + A(j)$$

**Tasa interna de retorno**

$$Vp = - \text{Flujo inicial} + \left( \sum_{j=1}^n \text{Flujo}(P / F, i, j) \right)$$

**Periodo de recuperación**

$$Pr = \frac{ABS(\text{flujo})}{\text{ingreso por periodo}}$$

**Formulario para el sustentante del**

Examen General para el Egreso de la Licenciatura en Ingeniería Electrónica (EGEL-IELECTRO)

**Dirección del Programa de Evaluación de Egreso (EGEL) Diseño, Ingenierías y Arquitectura**

**Razón costo-beneficio**

$$\frac{B}{C} = B - \frac{D}{C}$$

Nota: El ROI no se maneja en este contexto ya que es un indicador financiero.

**Diseño e integración de sistemas electrónicos****Construcción e implementación de sistemas electrónicos****Comunicaciones****Radiofrecuencia****Criterio de estabilidad de Linville**

$$C = \frac{|Y_r Y_t|}{2g_1 g_0 - \operatorname{Re}(Y_r Y_t)}$$

Si  $C < 1$  el transistor es incondicionalmente estable

Si  $C > 1$  el transistor es potencialmente inestable

**Factor de estabilidad de Stern**

$$K = \frac{2(g_1 + G_s)(g_0 + G_L)}{|Y_r Y_t| + \operatorname{Re}(Y_r Y_t)}$$

**Ganancia máxima disponible en el transistor (MAG)**

$$MAG = \frac{|Y_r|^2}{4g_1 g_0}$$

donde:

$Y_r$  = La admitancia de transferencia inversa

$Y_t$  = La admitancia de transferencia directa

$g_1$  = La conductancia de entrada

$g_0$  = La conductancia de salida

$\operatorname{Re}$  = La parte real del producto entre paréntesis

$G_s$  = La conductancia de la fuente

$G_L$  = La conductancia de la carga

**Criterio de estabilidad incondicional en términos de los parámetros S**

$$K = \frac{1 - |S_{11}|^2 - |S_{22}|^2 + |\Delta|^2}{2|S_{12} S_{21}|} > 1$$

donde:

$$\Delta = S_{11} S_{22} - S_{12} S_{21} < 1$$

**Formulario para el sustentante del**

Examen General para el Egreso de la Licenciatura en Ingeniería Electrónica (EGEL-IELECTRO)

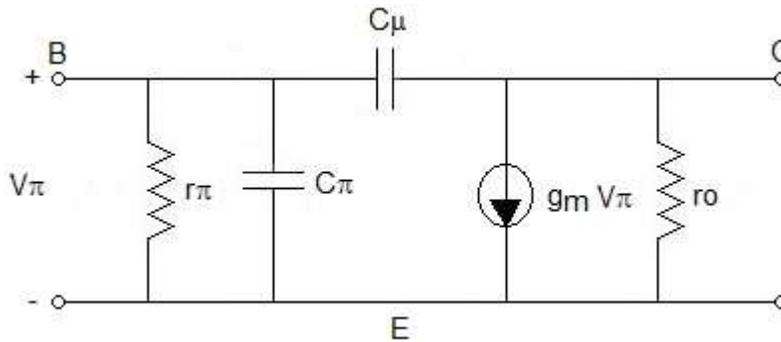
**Dirección del Programa de Evaluación de Egreso (EGEL) Diseño, Ingenierías y Arquitectura**

**Teorema de Miller**

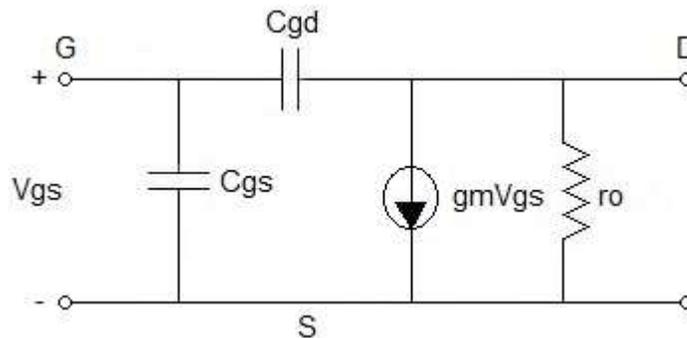
$C_{ent(Miller)} = C_{bo} (1 + A_v)$	Capacitancia de entrada Miller, donde $C=C_{bo}$
$C_{sal(Miller)} = C_{bo} \left( \frac{1 + A_v}{A_v} \right)$	Capacitancia de salida Miller, donde $C=C_{bo}$

donde:  $C_{bo}$  es la capacitancia entre la entrada y la salida del amplificador.

**Respuesta en frecuencia de un amplificador**



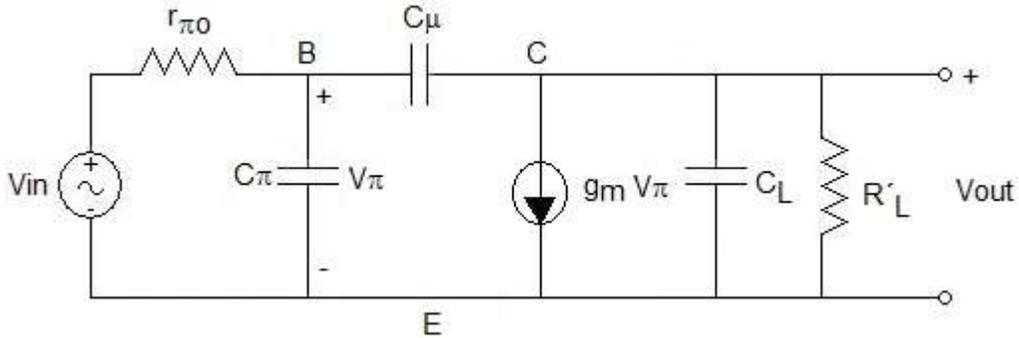
Modelo de señal pequeña del BJT



Modelo de señal pequeña del FET

**Respuesta en altas frecuencias de un amplificador emisor común (BJT)**

Modelo equivalente de señal pequeña del amplificador



Los polos del circuito son:

$$f_{p1} = \frac{1}{2\pi r_{\pi o} \left( [C_{\pi} + C_{\mu} (1 + g_m R_L)] + \frac{R_L}{r_{\pi o}} [(C_{\mu} + C_L)] \right)}$$

$$f_{p2} = \frac{C_{\pi} g_L + C_{\mu} (g_m + g_{\pi o} + g_L) + C_L g_{\pi o}}{2\pi C_{\pi} (C_{\mu} + C_L) + C_{\mu}} \cong \frac{g_m}{C_{\pi} + C_L}$$

donde:

$$R_L = \frac{1}{g_L}$$

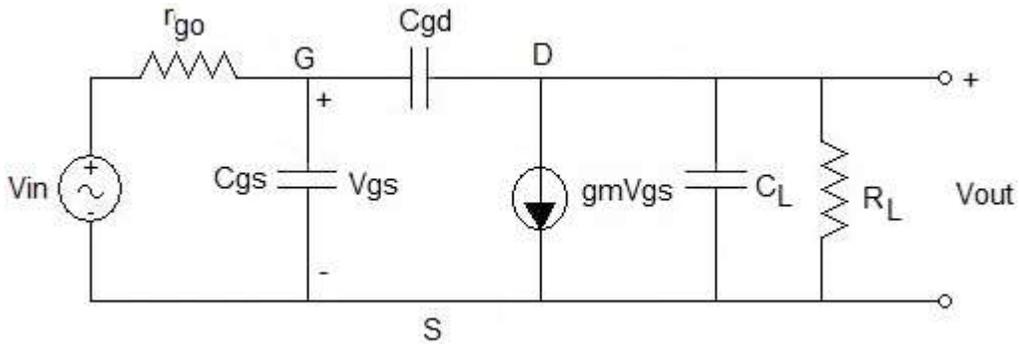
$$r_{\pi o} = \frac{1}{g_{\pi o}}$$

**Formulario para el sustentante del**

Examen General para el Egreso de la Licenciatura en Ingeniería Electrónica (EGEL-IELECTRO)

**Dirección del Programa de Evaluación de Egreso (EGEL) Diseño, Ingenierías y Arquitectura**

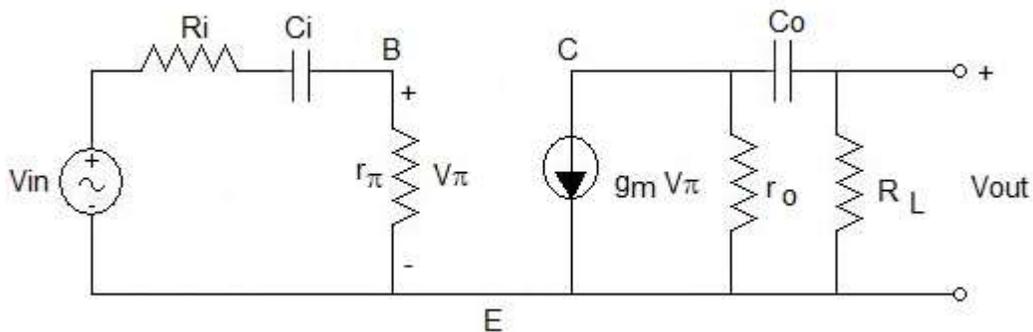
**Respuesta en altas frecuencias de un amplificador fuente común (FET)**



Considere el caso anterior (Respuesta en altas frecuencias de un amplificador emisor común (BJT)) y en las expresiones según la figura.

**Respuesta en bajas frecuencias de un amplificador emisor común (BJT)**

Si  $C_i \gg C_\pi$  y  $C_\mu$  es despreciable



La función de transferencia está dada por:  $C$

$$H(s) = \frac{\frac{r_\pi}{R_i + r_\pi} \frac{r_o}{R_L + r_o} g_m R_L s^2}{\left( s + \frac{1}{C_i (R_i + r_\pi)} \right) \left( s + \frac{1}{C_o (r_o + R_L)} \right)}$$

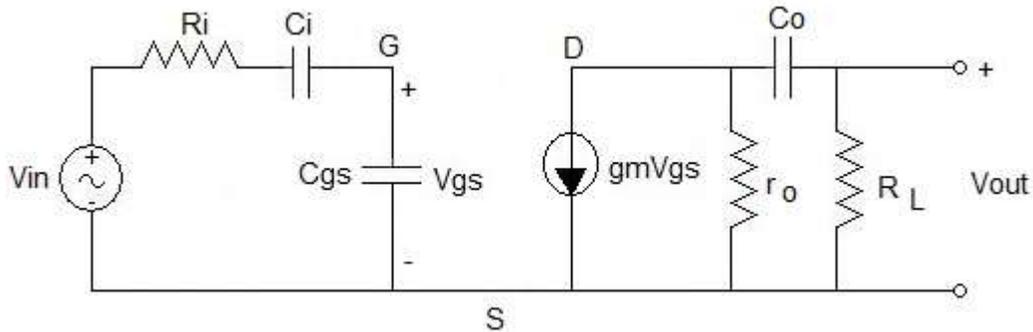
Los polos del circuito están dadas por:

$$f_{p1} = \frac{1}{2\pi C_i (R_i + r_\pi)}$$

$$f_{p2} = \frac{1}{2\pi C_o (r_o + R_L)}$$

**Respuesta en bajas frecuencias de un amplificador fuente común (FET)**

Si  $C_i$  es despreciable:



La función de transferencia está dada por:

$$H(s) = \frac{\frac{1}{R_i C_{gs}} \frac{r_o}{R_L + r_o} g_m R_L s}{\left( s + \frac{1}{R_i} \frac{C_i + C_{gs}}{C_i C_{gs}} \right) \left( s + \frac{1}{C_o (r_o + R_L)} \right)}$$

y los polos del circuito son:

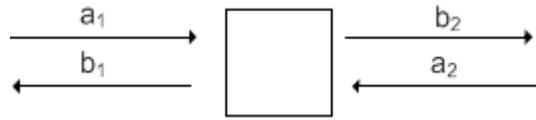
$$f_{p1} = \frac{1}{2\pi R_i \frac{C_i C_{gs}}{C_i + C_{gs}}}$$

$$f_{p2} = \frac{1}{2\pi C_o (r_o + R_L)}$$

**Parámetros de dispersión**

**Formulario para el sustentante del**

Examen General para el Egreso de la Licenciatura en Ingeniería Electrónica (EGEL-IELECTRO)

**Dirección del Programa de Evaluación de Egreso (EGEL) Diseño, Ingenierías y Arquitectura**

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

$$S_{11} = \left. \frac{b_1}{a_1} \right|_{a_2=0}$$

Coeficiente de reflexión del puerto 1 (Entrada)

$$S_{21} = \left. \frac{b_2}{a_1} \right|_{a_2=0}$$

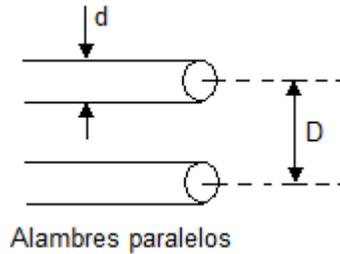
Coeficiente de transmisión del puerto 1 al 2 (Ganancia)

$$S_{12} = \left. \frac{b_1}{a_2} \right|_{a_1=0}$$

Coeficiente de transmisión del puerto 2 al 1 (Ganancia en inversa)

$$S_{22} = \left. \frac{b_2}{a_2} \right|_{a_1=0}$$

Coeficiente de reflexión del puerto 2 (Salida)

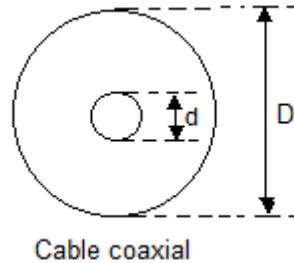
**Líneas de transmisión****Impedancia característica**

$$Z_0 = 276 \log \frac{2D}{d}$$

donde:

D = distancia entre conductores o diámetro exterior

d = diámetro del conductor o diámetro interior

**Impedancia característica para cable coaxial:**

$$Z_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \ln \left( \frac{D}{d} \right) \approx 138 \sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}} \log \left( \frac{D}{d} \right)$$

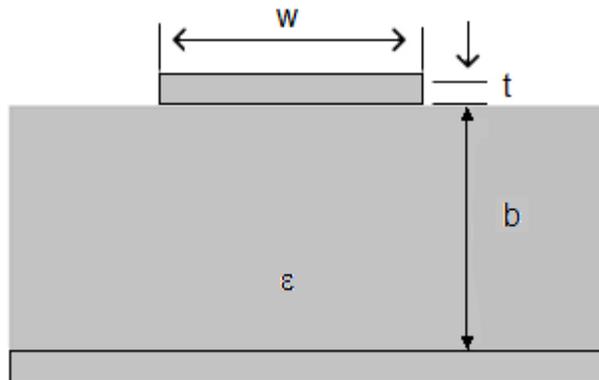
donde:

D = distancia entre conductores o diámetro exterior

d = diámetro del conductor o diámetro interior

$\mu_r$  y  $\epsilon_r$  es la permeabilidad relativa y la permitividad relativa del material aislante, respectivamente.

**Línea de transmisión de tipo microcinta**



Si  $t \ll W$

$$Z_0 = \begin{cases} \frac{60}{\sqrt{\epsilon_e}} \ln\left(\frac{8b}{W} + \frac{W}{4b}\right) & \text{Si } \frac{W}{b} < 1 \\ \frac{120\pi}{\sqrt{\epsilon_e} \left[ W/b + 1.393 + 0.667 \ln(W/b + 1.444) \right]} & \text{Si } \frac{W}{b} > 1 \end{cases}$$

donde:

$$\epsilon_e = \frac{\epsilon_r + 1}{2} + \frac{\epsilon_r - 1}{2} \frac{1}{\sqrt{1 + 12b/W}}$$

En otro caso:

$$Z_0 = \frac{87}{\sqrt{\epsilon + 1.41}} \ln\left(\frac{5.98b}{0.8W + t}\right)$$

- $\epsilon_r$  = constante dieléctrica
- $W$  = ancho de la pista
- $t$  = espesor de la pista
- $b$  = distancia entre la pista al plano a tierra

**Impedancia característica de líneas de microcinta paralelas**

$$Z_0 = \frac{60}{\epsilon} \ln\left(\frac{4d}{0.67\pi W(0.8 + t/b)}\right)$$

Impedancia característica

$$Z_0 = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}}$$

**Constante de propagación**

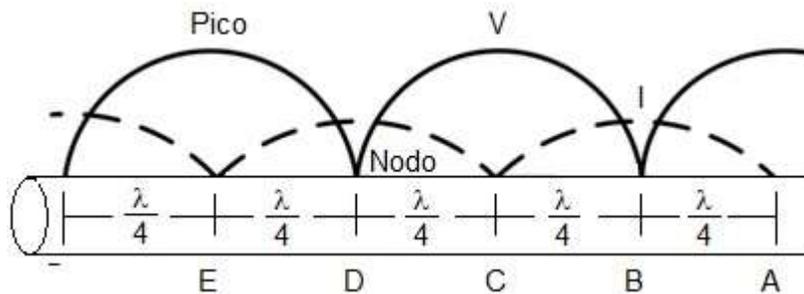
$$\gamma = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)}$$

**Velocidad de propagación**

$$v_p = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

**Tiempo de retardo**

$$t_d = \sqrt{LC}$$

**Ondas estacionarias**

Ondas estacionarias en una línea de transmisión en circuito abierto

**Coefficiente de reflexión**

$$\Gamma = \frac{V_r}{V_i}$$

$$\Gamma = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}$$

Si  $V_{\max} = 1 + |\Gamma|$  y  $V_{\min} = 1 - |\Gamma|$

entonces:

$$\Gamma = \frac{V_{\max} - V_{\min}}{V_{\max} + V_{\min}}$$

donde:

$\Gamma$  = Coeficiente de reflexión

$V_r$  = Voltaje reflejado

$V_i$  = Voltaje incidente

**Relación de onda estacionaria (SWR) y el coeficiente de reflexión ( $\Gamma$ )**

$$SWR = \frac{V_{max}}{V_{min}} = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|}$$

y

$$\Gamma = \frac{SWR - 1}{SWR + 1}$$

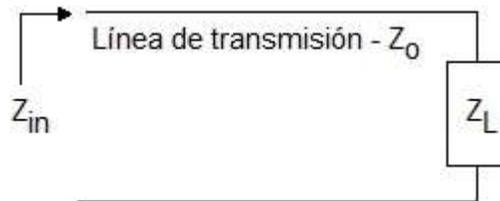
Si  $Z_L \in \Re$  y  $Z_L > Z_0$ , entonces:

$$SWR = \frac{Z_L}{Z_0}$$

Si  $Z_L \in \Re$  y  $Z_L < Z_0$ , entonces:

$$SWR = \frac{Z_0}{Z_L}$$

**Impedancia de entrada ( $Z_{in}$ )**



$$Z_{in} = Z_0 \frac{Z_L + jZ_0 \tan(\beta l)}{Z_0 + jZ_L \tan(\beta l)}$$

donde:

$\beta$  = es el número angular de onda

$l$  = es la longitud de la línea

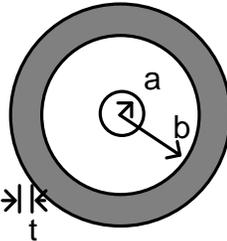
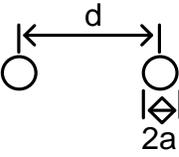
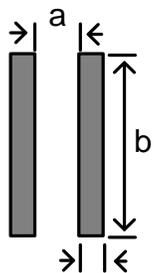
Para una línea de transmisión de  $\lambda / 2$

$$Z_{in} = Z_L$$

Para una línea de transmisión de  $\lambda / 4$

$$Z_{in} = \frac{Z_0^2}{Z_L}$$

**Tabla de parámetros distribuidos**

	Coaxial	Bifilar	Doble cinta
			
C (F/m)	$\frac{2\pi\epsilon}{\ln(b/a)}$	$\frac{\pi\epsilon}{\ln(d/a)}$	$\frac{\epsilon b}{a}$
L (Hy/m)	$\frac{\mu}{2\pi} \ln(b/a)$	$\frac{\mu}{\pi} \ln(d/a)$	$\frac{\mu a}{b}$
G ( $\Omega M$ ) <sup>-1</sup>	$\frac{2\pi\sigma_{cq}}{\ln(b/a)}$	$\frac{2\pi\sigma_{cq}}{\ln(d/a)}$	$\frac{\sigma_{cq} b}{a}$
Alta frecuencia	R ( $\Omega/m$ )	$\frac{R_s}{2\pi} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$	$\frac{2R_s}{b}$
	Z <sub>0</sub> ( $\Omega$ )	$\frac{\eta}{2\pi} \ln(b/a)$	$\frac{\eta a}{b}$
Baja frecuencia	R ( $\Omega/m$ )	$\frac{\rho}{\pi} \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{2bt} \right)$	$\frac{2\rho}{bt}$
	Z <sub>0</sub> ( $\Omega$ )	$\sqrt{\frac{R+i\omega L}{G+i\omega C}}$	

## Antenas

### Ganancia directiva

$$G_{(dB)} = \frac{P_{\text{antena de prueba}}}{P_{\text{antena de referencia}}} [dB]$$

### Resistencia de radiación

$$R_r = \frac{P_{\text{radiada}}}{I_{\text{entrada}}^2} [\Omega]$$

$$R_r = 790 \left( \frac{l}{\lambda} \right)^2 [\Omega]$$

### Ancho de banda de la antena

$$f_m = \sqrt{f_L \cdot f_H}$$

### Longitud efectiva

$$l_e = \frac{292}{f}$$

### Área efectiva

$$A_{\text{ef}} = \frac{W_r}{P_i}$$

### Densidad de potencia radiada

$$P(\theta, \phi) = \text{Re}(E \times H^*)$$

### Impedancia característica del medio

$$\frac{E}{H} = \eta$$

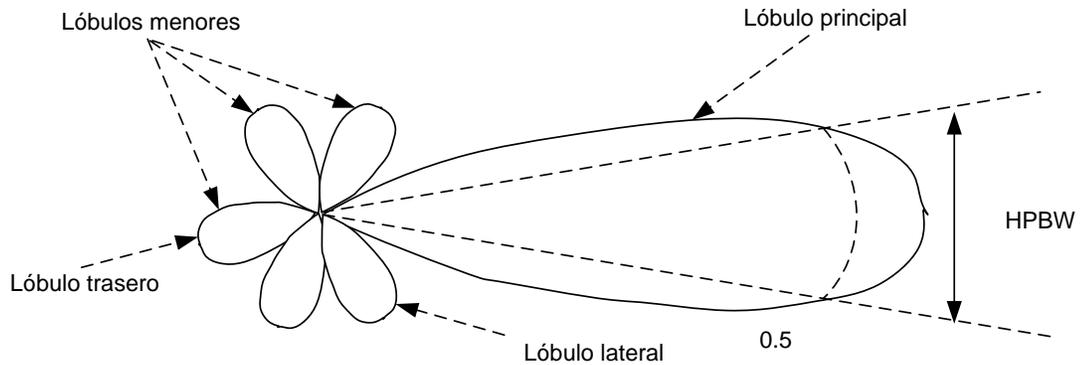
### Potencia total radiada

$$W_r = \iint P(\theta, \phi) \cdot ds$$

**Directividad**

$$D = \frac{P_{\max}}{\frac{W_r}{4\pi r^2}}$$

**Lóbulo**



**Ancho del haz principal**

$$BW_n \approx 2.25BW_{-3dB}$$

**Intensidad del campo**

$$E = \frac{\sqrt{30D_t \cdot P_t}}{d}$$

**Formulario para el sustentante del**

Examen General para el Egreso de la Licenciatura en Ingeniería Electrónica (EGEL-IELECTRO)

**Dirección del Programa de Evaluación de Egreso (EGEL) Diseño, Ingenierías y Arquitectura**

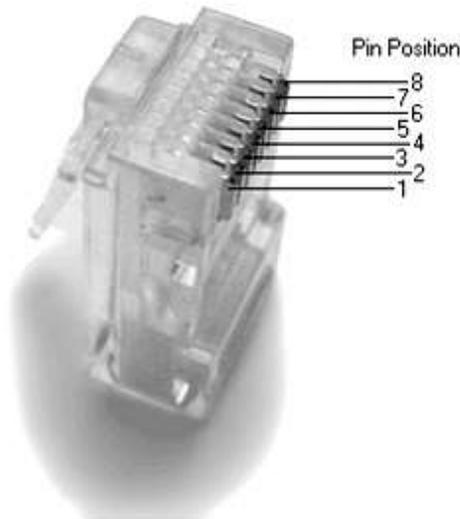
**Conectores**

**RJ45**

Cable cruzado T568A

Cable cruzado T568B

TX+		
1 Transceive data +	Blanco - Verde	Blanco - Naranja
TX-		
2 Transceive data -	Verde	Naranja
RX+		
3 Receive data +	Blanco - Naranja	Blanco - Verde
BDD+		
4 Bi-directional data +	Azul	Azul
BDD-		
5 Bi-directional data -	Blanco - Azul	Blanco - Azul
RX-		
6 Receive data -	Naranja	Verde
BDD+		
7 Bi-directional data +	Blanco - Marrón	Blanco - Marrón
BDD-		
8 Bi-directional data -	Marrón	Marrón



	
Blanco - Naranja	Blanco - Verde
	
Naranja	Verde
	
Blanco - Verde	Blanco - Naranja
	
Azul	Blanco - Marrón
	
Blanco - Azul	Marrón
	
Verde	Naranja
	
Blanco - Marrón	Azul
	
Marrón	Blanco - Azul

**RJ11**

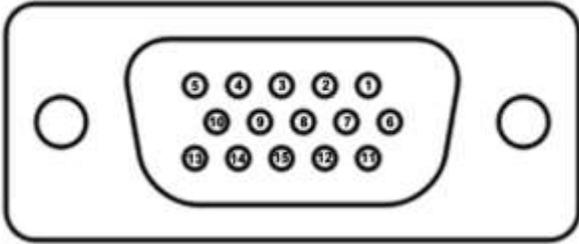
Posición RJ11	RJ10	RJ14	Par	T/R ±	Colores cat 5e/6	Colores	Colores antiguos	Colores alemanes
1	1		3	T +	 blanco/verde	 blanco/verde	 naranja	 rosa
2	2	1	2	T +	 blanco/naranja	 blanco/naranja	 negro	 verde
3	3	2	1	1 R -	 azul	 azul/blanco	 rojo	 blanco
4	4	3	2	1 T +	 blanco/azul	 blanco/azul	 verde	 marrón
5	5	4	2	R -	 naranja	 naranja/blanco	 amarillo	 amarillo
6	6		3	R -	 verde	 verde/blanco	 azul	 gris

**Formulario para el sustentante del**

Examen General para el Egreso de la Licenciatura en Ingeniería Electrónica (EGEL-IELECTRO)

**Dirección del Programa de Evaluación de Egreso (EGEL) Diseño, Ingenierías y Arquitectura**

**VGA**

<b>Pines</b>		
		
Un conector DE15 hembra.		
Pin 1	RED	Canal rojo
Pin 2	GREEN	Canal verde
Pin 3	BLUE	Canal azul
Pin 4	N/C	Sin contacto
Pin 5	GND	Tierra (HSync)
Pin 6	RED_RTN	Vuelta rojo
Pin 7	GREEN_RTN	Vuelta verde
Pin 8	BLUE_RTN	Vuelta azul
Pin 9	+5 V	+5 V (Corriente continua)
Pin 10	GND	tierra (Sincr. Vert, corriente continua)
Pin 11	N/C	Sin contacto
Pin 12	SDA	I <sup>2</sup> C datos
Pin 13	HSync	Sincronización horizontal
Pin 14	VSync	Sincronización vertical
Pin 15	SCL	I <sup>2</sup> Velocidad reloj

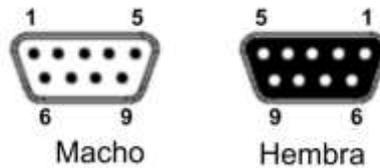
**USB**

**Patillaje**

The standard USB A plug (left) and B plug (right)

Pin 1	V <sub>CC</sub> (+5 V)
Pin 2	Data-
Pin 3	Data+
Pin 4	Ground

**DB9**



Se debe tener en cuenta que existen adaptadores DB9-DB25 para convertir fácilmente un enchufe DB9 en uno DB25 y viceversa.

Pines

Número de clavija	Nombre
1	CD: Detector de transmisión
2	RXD: Recibir datos
3	TXD: Transmitir datos
4	DTR: Terminal de datos lista
5	GND: Señal de tierra
6	DSR: Ajuste de datos listo
7	RTS: Permiso para transmitir
8	CTS: Listo para enviar
9	RI: Indicador de llamada

**Formulario para el sustentante del**

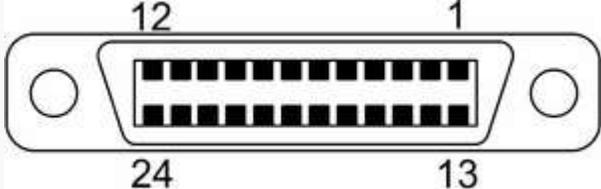
Examen General para el Egreso de la Licenciatura en Ingeniería Electrónica (EGEL-IELECTRO)

**Dirección del Programa de Evaluación de Egreso (EGEL) Diseño, Ingenierías y Arquitectura****DB-25**

**Asignaciones de patas al conector D-25 para impresoras:** Este conector trabaja para el puerto paralelo.

<b>Pata</b>	<b>Señal</b>	<b>E/S</b>	<b>Definición</b>
1	STB#	E/S	Estrobo
2	PD0	E/S	Bit 0 de datos de impresora
3	PD1	E/S	Bit 1 de datos de impresora
4	PD2	E/S	Bit 2 de datos de impresora
5	PD3	E/S	Bit 3 de datos de impresora
6	PD4	E/S	Bit 4 de datos de impresora
7	PD5	E/S	Bit 5 de datos de impresora
8	PD6	E/S	Bit 6 de datos de impresora
9	PD7	E/S	Bit 7 de datos de impresora
10	ACK#	E	Reconocimiento
11	BUSY	E	Ocupado
12	PE	E	Fin del papel
13	SLCT	E	Seleccionar
14	AFD#	S	Avance automático
15	ERR#	E	Error
16	INIT#	S	Iniciar impresora
17	SLIN#	S	Seleccionar
18–25	GND	N/D	Tierra de señal

## IEEE.488

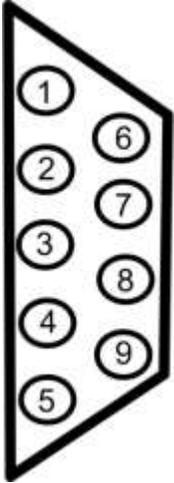
Terminales		
 <p style="text-align: center;">Conector hembra IEEE-488</p>		
Pin 1	DIO1	Entrada de dato / bit de salida
Pin 2	DIO2	Entrada de dato / bit de salida.
Pin 3	DIO3	Entrada de dato / bit de salida
Pin 4	DIO4	Entrada de dato / bit de salida
Pin 5	EOI	Final o identificación
Pin 6	DAV	Validación de datos
Pin 7	NRFD	No está listo para recibir dato
Pin 8	NDAC	No se acepta el dato
Pin 9	IFC	Interfaz limpia
Pin 10	SRQ	Servicio
Pin 11	ATN	Atención de datos
Pin 12	SHIELD	
Pin 13	DIO5	Entrada de dato / bit de salida
Pin 14	DIO6	Entrada de dato / bit de salida
Pin 15	DIO7	Entrada de dato / bit de salida
Pin 16	DIO8	Entrada de dato / bit de salida
Pin 17	REN	Remoto activado
Pin 18	GND	(emparejado con DAV)
Pin 19	GND	(emparejado con NRFD)
Pin 20	GND	(emparejado con NDAC)
Pin 21	GND	(emparejado con IFC)
Pin 22	GND	(emparejado con SRQ)

**Formulario para el sustentante del**

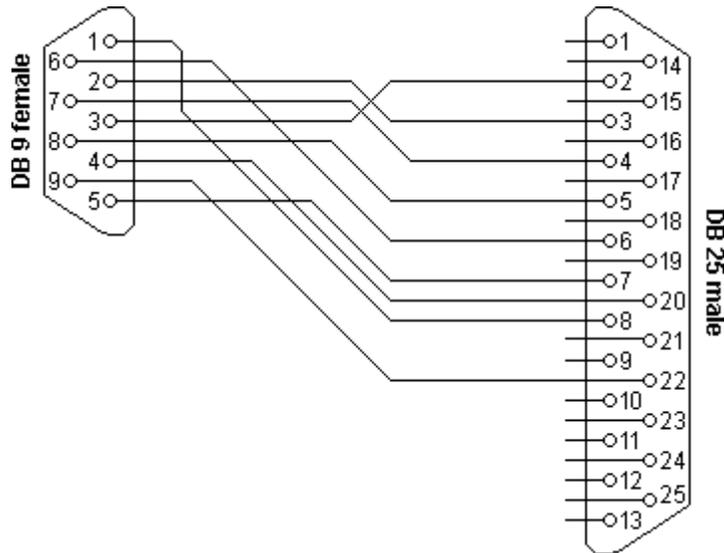
Examen General para el Egreso de la Licenciatura en Ingeniería Electrónica (EGEL-IELECTRO)

**Dirección del Programa de Evaluación de Egreso (EGEL) Diseño, Ingenierías y Arquitectura**

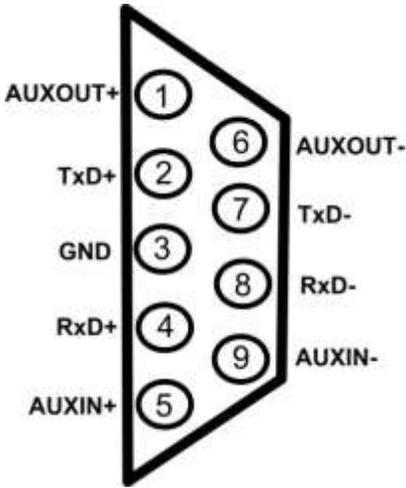
**RS-232 DB9**

		<p>PIN 1: Detector de acarreo                  PIN 2: Recibe dato                  PIN 3: Transmite dato                  PIN 4: Terminal de dato lista                  PIN 5: Tierra                  PIN 6: Dato listo                  PIN 7: Requisita para mandar                  PIN 8: Limpia para enviar                  PIN 9: Indicador</p>
---	--	--

**Convertidor RS-232 a DB-25**



**RS – 422/485 DB – 9**

	<p>PIN 1: Salida auxiliar +                  PIN 2: Dato de salida +                  PIN 3: Tierra                  PIN 4: Entrada de dato +                  PIN 5: Salida auxiliar +                  PIN 6: Salida auxiliar –                  PIN 7: Salida de dato –                  PIN 8: Entrada de dato –                  PIN 9: Entrada auxiliar –</p>	
---	---	--

**Matemáticas**

**Álgebra**

**Propiedades de desigualdades**

$$\left. \begin{array}{l} \text{Si } x < y \quad \Rightarrow \quad x + z < y + z \\ \text{Si } x < y; \quad z > 0 \Rightarrow \quad xz < yz \\ \text{Si } x < y; \quad z < 0 \Rightarrow \quad xz > yz \\ \text{Si } x < y; \quad y < z \Rightarrow \quad x < z \end{array} \right\} \forall x, y, z \in \mathfrak{R}$$

**Teorema del residuo**

$\forall f(x); g(x) \neq 0$ , existen  $q(x); r(x)$ ;  $f, g, q, r$  polinomios tales que:  $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$ , con  $gr(r) < gr(g)$  o  $r(x) = 0$

**Teorema de la raíz racional**

$$\begin{aligned} f(x) &= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \\ a_n &\neq 0 \\ a_0 &\neq 0 \end{aligned}$$

Las raíces racionales de  $f$  son de la forma  $\frac{p}{q}$  donde  $p$  es factor de  $a_0$  y  $q$  de  $a_n$ .

**Para matrices A y B**

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} \quad A \text{ y } B \text{ no singulares}$$

$$\text{tr}(A+B) = \text{tr } A + \text{tr } B$$

$$\text{tr}(aA) = a(\text{tr } A)$$

$$(AB)^T = B^T A^T$$

$$\det(A) = \det(A^T)$$

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

$$A(\text{Adj } A) = (\text{Adj } A)A$$

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)} \quad A \text{ no singular}$$

donde:

tr A= traza de A

A<sup>T</sup>= transpuesta de A

**Fórmulas para potencia y raíces**

$p \cdot a^n \pm q \cdot a^n = (p \pm q) \cdot a^n$	$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$(a^m)^n = (a^n)^m = a^{m \cdot n}$
$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$	$\left(\frac{a^n}{b^n}\right) = \left(\frac{a}{b}\right)^n$
$p \cdot \sqrt[n]{a} \pm q \cdot \sqrt[n]{a} = (p \pm q) \cdot \sqrt[n]{a}$	$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$
$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}$	$n \cdot \sqrt[n]{a^{m \cdot x}} = \sqrt[n]{a^m}$
$\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m = a^{\frac{m}{n}} \quad *$	$\sqrt{-a} = i \cdot \sqrt{a}$
*No es válida en algunos casos por ejemplo: $\sqrt{(-2)^2} = +2, (\sqrt{-2})^2 = -2$	

Nota: Los exponentes para potencias y raíces deben ser escalares

**Formulario para el sustentante del**

Examen General para el Egreso de la Licenciatura en Ingeniería Electrónica (EGEL-IELECTRO)

**Dirección del Programa de Evaluación de Egreso (EGEL) Diseño, Ingenierías y Arquitectura****Transformación de expresiones algebraicas usuales**

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$	$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$
$(a + b + c)^2 = a^2 + 2ab + 2ac + b^2 + 2bc + c^2$	$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$
$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$	$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$
$ax^2 + bx + c = 0 \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	$x^2 + px + q = 0 \quad x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$
$(a - b + c)^2 = a^2 - 2ab + 2ac + b^2 - 2bc + c^2$	
$(a + b)^n = a^n + \frac{n}{1} a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{n-3}b^3 + \dots + b^n$	
$a^n + b^n = (a - b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$	

**Logaritmos**

$\log(x \cdot y) = \log x + \log y$	$\log \frac{x}{y} = \log x - \log y$
$\log x^n = n \log x$	$\log \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \log x$
$\log_a n = n \log_a$	$\log_a a = 1$
$\log 1 = 0$	

**Binomio de Newton**

$$(a + b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} \cdot b + \binom{n}{2} a^{n-2} \cdot b^2 + \binom{n}{3} a^{n-3} \cdot b^3 + \dots$$

Donde  $n$  tiene que ser un número entero

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2) \dots n-k+1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots k}$$

**Teorema del binomio (de Newton)**

$$(1+x)^n = 1 + \frac{nx}{1!} + \frac{n(n-1)x^2}{2!} + \dots$$

**Teorema binomial**

$$(x+a)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k a^{n-k}$$

**Permutaciones**

Número de permutaciones de  $n$  elementos

$$P_n = n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$$

**Combinaciones y ordenaciones**

Número de combinaciones sin repetición	Número de combinaciones con repetición
$C_k^n = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$	${}_r C_k^n = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} = \binom{n+k-1}{k}$ $r$ con repetición
Número de ordenaciones sin repetición	Número de ordenaciones con repetición
$O_k^n = C_k^n \cdot P_k = \binom{n}{k} \cdot k! = \frac{n!}{(n-k)!}$	${}_r O_k^n = n^k$

donde:

C = número de combinaciones posibles

N = número de elementos dados

K = número de elementos seleccionados de entre  $n$  elementos dados

O = número de ordenaciones posibles

**Serie binómica o binomial**

$$f(x) = (1 \pm x)^\alpha = 1 \pm \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots$$

$\alpha$  es un número cualquiera, positivo o negativo, entero o fraccionario

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)\dots(\alpha-n+1)}{n!}$$

**Formulario para el sustentante del**

Examen General para el Egreso de la Licenciatura en Ingeniería Electrónica (EGEL-IELECTRO)

**Dirección del Programa de Evaluación de Egreso (EGEL) Diseño, Ingenierías y Arquitectura****Serie de Taylor (serie de McLaurin)**

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots$$

**Forma de McLaurin, cuando  $a=0$** 

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots$$

**Expansión de Taylor**

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \quad -\infty < x < \infty$$

**Determinantes por la regla de Cramer para la solución de ecuaciones simultáneas**

Determinantes de segundo orden

Para el sistema de dos ecuaciones:

$$\begin{aligned} A_1x + B_1y &= C_1 \\ A_2x + B_2y &= C_2 \end{aligned}$$

Se resuelve mediante:

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = (A_1)(B_2) - (B_1)(A_2)$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} C_1 & B_1 \\ C_2 & B_2 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{(C_1)(B_2) - (B_1)(C_2)}{\Delta}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{(A_1)(C_2) - (C_1)(A_2)}{\Delta}$$

Para el sistema de tres ecuaciones:

$$\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z &= D_1 \\ A_2x + B_2y + C_2z &= D_2 \\ A_3x + B_3y + C_3z &= D_3 \end{aligned}$$

Se resuelve mediante:

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = A_1 B_2 C_3 + A_2 B_3 C_1 + A_3 B_1 C_2 - A_3 B_2 C_1 - A_1 B_3 C_2 - A_2 B_1 C_3$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} D_1 & B_1 & C_1 \\ D_2 & B_2 & C_2 \\ D_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{D_1 B_2 C_3 + D_2 B_3 C_1 + D_3 B_1 C_2 - D_3 B_2 C_1 - D_1 B_3 C_2 - D_2 B_1 C_3}{\Delta}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} A_1 & D_1 & C_1 \\ A_2 & D_2 & C_2 \\ A_3 & D_3 & C_3 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{A_1 D_2 C_3 + A_2 D_3 C_1 + A_3 D_1 C_2 - A_3 D_2 C_1 - A_1 D_3 C_2 - A_2 D_1 C_3}{\Delta}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & D_3 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{A_1 B_2 D_3 + A_2 B_3 D_1 + A_3 B_1 D_2 - A_3 B_2 D_1 - A_1 B_3 D_2 - A_2 B_1 D_3}{\Delta}$$

### Álgebra lineal

Si  $B = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n\}$  es base de un espacio  $V$ ;  $\bar{x} \in V$

y  $\bar{x} = \alpha_1 \bar{v}_1 + \alpha_2 \bar{v}_2 + \dots + \alpha_n \bar{v}_n$ ; entonces, el vector de coordenadas de  $\bar{x}$  respecto a  $B$  es:

$$(\bar{x})_B = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)^T$$

Si  $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w} \in V(C)$  espacio vectorial, entonces  $f(\bar{u}, \bar{v}) = (\bar{u} | \bar{v})$  es producto interno en  $V$  si:

- 1)  $(\bar{u} | \bar{v}) = \overline{(\bar{v} | \bar{u})}$
- 2)  $(\bar{u} | \bar{v} + \bar{w}) = (\bar{u} | \bar{v}) + (\bar{u} | \bar{w})$
- 3)  $(\alpha \bar{u} | \bar{v}) = \alpha (\bar{u} | \bar{v})$
- 4)  $(\bar{u} | \bar{u}) > 0$  si  $\bar{u} \neq \bar{0}$

$$\|\bar{v}\| = (\bar{v} | \bar{v})^{1/2} \text{ norma de } \bar{v}$$

$$d(\bar{u}, \bar{v}) = \|\bar{v} - \bar{u}\| \text{ distancia de } \bar{u} \text{ a } \bar{v}$$

$$\cos \theta = \frac{(\bar{u} \cdot \bar{v})}{\|\bar{u}\| \|\bar{v}\|} \text{ coseno del ángulo entre } \bar{u} \text{ y } \bar{v}$$

Si  $B = \{\bar{g}_1, \bar{g}_2, \dots, \bar{g}_n\}$  es base ortogonal de un espacio  $V$ ;  $\bar{v} \in V$  y  $(\bar{v})_B = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)^T$  entonces

$$\alpha_i = \frac{(\bar{v} | \bar{g}_i)}{(\bar{g}_i | \bar{g}_i)} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Si  $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_m\}$  es base ortonormal de un subespacio  $W$  del espacio  $V$  y  $\bar{v} \in V$ ; entonces, la

proyección de  $\bar{v}$  sobre  $W$  es:  $\sum_{i=1}^m (\bar{v} | \bar{e}_i) \bar{e}_i$

Para la transformación lineal  $T:V \rightarrow W$

$$\begin{cases} T(V) = \{T(\bar{v}) \mid \bar{v} \in V\} & \text{recorrido de } V \\ N(T) = \{\bar{v} \in V \mid T(\bar{v}) = \bar{0}\} & \text{núcleo de } T \\ \dim V = \dim T(V) + \dim N(T) \end{cases}$$

Para  $T:V \rightarrow W$

$A = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n\}$  base de  $V$  y  $B$  base de  $W$  la matriz asociada a  $T$ ,  $M_B^A(T)$  tiene por columnas a:

$$[T(\bar{v}_1)]_B, [T(\bar{v}_2)]_B, \dots, [T(\bar{v}_n)]_B$$

para  $T:V \rightarrow V$ ,  $\bar{v} \in V$  es vector característico de  $T$  si:

$$T(\bar{v}) = \lambda \bar{v} \text{ con } \lambda \neq 0 \text{ y } \bar{v} \neq \bar{0}$$

## Cálculo diferencial

### Relación de cambio: Derivada

#### Pendiente en un punto. Relación (o intensidad) de cambio

#### Pendiente de una curva

En una curva  $y = f(x)$ , la pendiente  $m$  varía en cada punto. La pendiente de la curva en un punto P es también la tangente en dicho punto:

$$m = \tan \alpha = \frac{\Delta y'}{\Delta x'}$$

#### Relación media de cambio (cociente incremental)

La intensidad media de variación de la función  $y = f(x)$  es la relación de los incrementos  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  correspondientes al segmento de curva  $PP_1$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

#### Derivada (cociente diferencial)

Cuando  $\Delta x$  tiende a cero, el punto  $P_1$  tiende al punto P, y la secante  $PP_1$ , a la tangente a la curva en P. De manera que la relación de incrementos se convierte en la relación de diferenciales, que es la derivada (o Intensidad de cambio) de la función en P:

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = f'(x)$$

#### Interpretación geométrica de la derivada

#### Curvas de derivadas sucesivas

Si para cada  $x$  de una curva se lleva la pendiente (o derivada) correspondiente  $y'$  como ordenada, se obtendrá la curva de  $y' = f'(x)$ , o de la primera derivada de la curva dada  $y = f(x)$ . Si se deriva la curva  $y' = f'(x)$  se obtendrá  $y'' = f''(x)$  o la segunda derivada de la curva dada  $y = f(x)$ , etc.

Radio de curvatura  $\rho$  en un punto dado  $x$ .

$$\rho = \frac{\sqrt{(1 + y'^2)^3}}{y''}$$

Coordenadas del centro de curvatura  $C$  correspondiente a un radio  $\rho$   
 $y''$

$$a = x - \frac{1 + y'^2}{y''} y'$$

$$b = y + \frac{1 + y'^2}{y''}$$

### Determinación de los valores máximos, mínimos y puntos de inflexión

Valores máximos y mínimos

Hágase  $y' = 0$  y sea  $a$  el valor obtenido de  $x$ . Sustitúyase ahora  $x = a$  en  $y''$

Si  $y''(a) > 0$  habrá un mínimo en  $x = a$

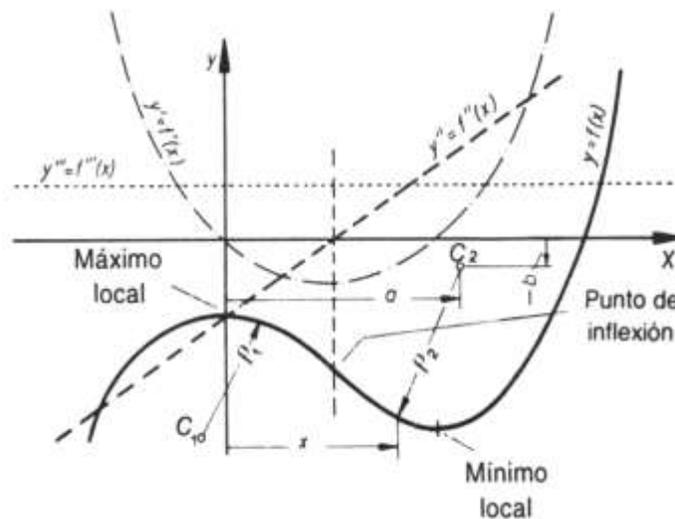
Si  $y''(a) < 0$  habrá un máximo en  $x = a$

Punto de inflexión

Hágase  $y'' = 0$  y sea  $a$  el valor obtenido de  $x$ . Sustitúyase ahora  $x = a$  en  $y'''$

Si  $y'''(a) \neq 0$  habrá un punto de inflexión en  $x = a$

Forma de la curva  $y = f(x)$



**Formulario para el sustentante del**

Examen General para el Egreso de la Licenciatura en Ingeniería Electrónica (EGEL-IELECTRO)

**Dirección del Programa de Evaluación de Egreso (EGEL) Diseño, Ingenierías y Arquitectura**

**Crecimiento y decrecimiento**

- $y'(x) > 0$        $y(x)$  crece si aumenta  $x$
- $y'(x) < 0$        $y(x)$  decrece si aumenta  $x$
- $y'(x) = 0$        $y(x)$  tiene en  $x$  una tangente paralela al eje  $x$

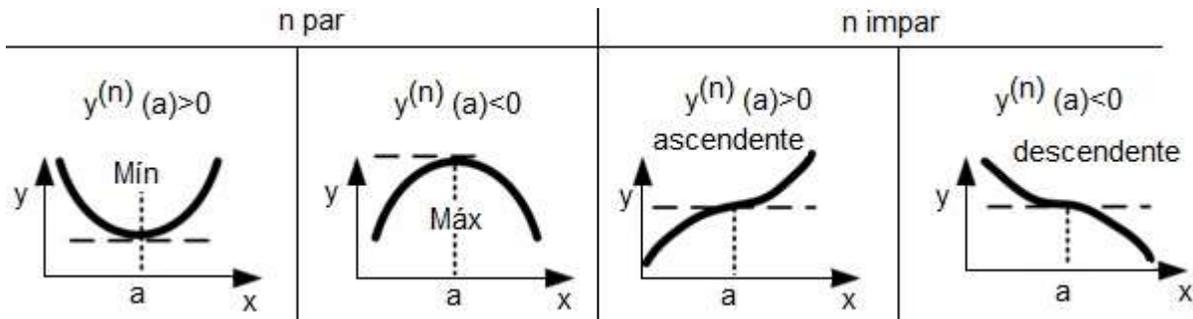
**Curvatura**

- $y''(x) > 0$        $y(x)$  será cóncava hacia arriba
- $y''(x) < 0$        $y(x)$  será cóncava hacia abajo
- $y''(x) = 0$       con cambio de signo  $y(x)$  tendrá en  $x$  un punto de inflexión  
sin cambio de signo  $y(x)$  tendrá en  $x$  un máximo o un mínimo

**Otros casos**

Si para  $x = a$

$y'(a) = y''(a) = y'''(a) = \dots = y^{(n-1)}(a) = 0$ , pero  $y^n \neq 0$ , pueden presentarse los cuatro casos siguientes:



## Tablas de derivadas

$\frac{d}{dx}(c) = 0$	$\frac{d}{dx}(cx) = c$
$\frac{d}{dx}(cx^n) = ncx^{n-1}$	$\frac{d}{dx}(u \pm v \pm w \pm \dots) = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx} \pm \frac{dw}{dx} \dots$
$\frac{d}{dx}(cu) = c \frac{du}{dx}$	$\frac{d}{dx}(uv) = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$
$\frac{d}{dx}(uvw) = uv \frac{dw}{dx} + uw \frac{dv}{dx} + vw \frac{du}{dx}$	$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\left(\frac{du}{dx}\right) - u\left(\frac{dv}{dx}\right)}{v^2}$
$\frac{d}{dx}(u^n) = nu^{n-1} \frac{du}{dx}$	$\frac{du}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{du}}$
$\frac{dF}{dx} = \frac{dF}{du} \frac{du}{dx}$ (Regla de la cadena)	

## Derivadas de las funciones exponenciales y logarítmicas

$\frac{d}{dx} u^v = \frac{d}{dx} e^{v \ln u} = e^{v \ln u} \frac{d}{dx} [v \ln u] = vu^{v-1} \frac{du}{dx} + u^v \ln u \frac{dv}{dx}$	
$\frac{d}{dx} \log_a u = \frac{\log_a e}{u} \frac{du}{dx} \quad a > 0, a \neq 1$	$\frac{d}{dx} a^u = a^u \ln a \frac{du}{dx}$
$\frac{d}{dx} \ln u = \frac{d}{dx} \log_e u = \frac{1}{u} \frac{du}{dx}$	$\frac{d}{dx} e^u = e^u \frac{du}{dx}$

## Derivadas de las funciones trigonométricas y de las trigonométricas inversas

$\frac{d}{dx} \operatorname{sen} u = \cos u \frac{du}{dx}$	$\frac{d}{dx} \cot u = -\operatorname{csc}^2 u \frac{du}{dx}$
$\frac{d}{dx} \cos u = -\operatorname{sen} u \frac{du}{dx}$	$\frac{d}{dx} \sec u = \sec u \tan u \frac{du}{dx}$
$\frac{d}{dx} \tan u = \sec^2 u \frac{du}{dx}$	$\frac{d}{dx} \operatorname{csc} u = -\operatorname{csc} u \cot u \frac{du}{dx}$
$\frac{d}{dx} \cos^{-1} u = \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx}$ $[0 < \cos^{-1} u < \pi]$	$\frac{d}{dx} \operatorname{sen}^{-1} u = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx}$ $[-\frac{\pi}{2} < \operatorname{sen}^{-1} u < \frac{\pi}{2}]$
$\frac{d}{dx} \tan^{-1} u = \frac{1}{1+u^2} \frac{du}{dx}$ $[-\frac{\pi}{2} < \tan^{-1} u < \frac{\pi}{2}]$	$\frac{d}{dx} \cot^{-1} u = \frac{-1}{1+u^2} \frac{du}{dx}$ $[0 < \cot^{-1} u < \pi]$

**Formulario para el sustentante del**

Examen General para el Egreso de la Licenciatura en Ingeniería Electrónica (EGEL-IELECTRO)

**Dirección del Programa de Evaluación de Egreso (EGEL) Diseño, Ingenierías y Arquitectura**

$\frac{d}{dx} \sec^{-1} u = \frac{1}{ u \sqrt{u^2-1}} \frac{du}{dx} = \frac{\pm 1}{u\sqrt{u^2-1}} \frac{du}{dx},$ $\left[ \begin{array}{l} +si \quad 0 < \sec^{-1} u < \frac{\pi}{2} \\ -si \quad \frac{\pi}{2} < \sec^{-1} u < \pi \end{array} \right]$	$\frac{d}{dx} \csc^{-1} u = \frac{-1}{ u \sqrt{u^2-1}} \frac{du}{dx} = \frac{\mp 1}{u\sqrt{u^2-1}} \frac{du}{dx},$ $\left[ \begin{array}{l} -si \quad 0 < \csc^{-1} u < \frac{\pi}{2} \\ +si \quad -\frac{\pi}{2} < \csc^{-1} u < 0 \end{array} \right]$
--	--

**Derivadas de las funciones hiperbólicas y de las hiperbólicas recíprocas**

$\frac{d}{dx} \sinh u = \cosh u \frac{du}{dx}$	$\frac{d}{dx} \coth u = -\operatorname{csc} h^2 u \frac{du}{dx}$
$\frac{d}{dx} \cosh u = \sinh u \frac{du}{dx}$	$\frac{d}{dx} \operatorname{sech} u = -\operatorname{sech} u \tanh u \frac{du}{dx}$
$\frac{d}{dx} \tanh u = \operatorname{sech}^2 u \frac{du}{dx}$	$\frac{d}{dx} \operatorname{csch} u = -\operatorname{csch} u \coth u \frac{du}{dx}$
$\frac{d}{dx} \operatorname{sen} h^{-1} u = \frac{1}{\sqrt{u^2+1}} \frac{du}{dx}$	$\frac{d}{dx} \operatorname{tanh}^{-1} u = \frac{1}{1-u^2} \frac{du}{dx}, \quad [-1 < u < 1]$
$\frac{d}{dx} \operatorname{csc} h^{-1} u = \frac{-1}{ u \sqrt{1+u^2}} \frac{du}{dx},$ $[- \text{ si } u > 0, + \text{ si } u < 0]$	$\frac{d}{dx} \operatorname{cos} h^{-1} u = \frac{\pm 1}{\sqrt{u^2-1}} \frac{du}{dx},$ $\left[ \begin{array}{l} + \text{ si } \operatorname{cosh}^{-1} u > 0, \quad u > 1 \\ - \text{ si } \operatorname{cosh}^{-1} u < 0, \quad u < 1 \end{array} \right]$
$\frac{d}{dx} \operatorname{sec} h^{-1} u = \frac{\pm 1}{u\sqrt{u^2-1}} \frac{du}{dx},$ $\left[ \begin{array}{l} - \text{ si } \operatorname{sech}^{-1} u > 0, \quad 0 < u < 1 \\ + \text{ si } \operatorname{sech}^{-1} u < 0, \quad 0 < u < 1 \end{array} \right]$	$\frac{d}{dx} \operatorname{coth}^{-1} u = \frac{1}{1-u^2} \frac{du}{dx},$ $[u > 1 \text{ ó } u < -1]$

## Cálculo integral

### Significado de la integración

Por integración se entiende el encontrar una función  $F(x)$  a partir de una función dada  $y = f(x)$  de manera que la derivada  $F'(x)$  sea igual a la original  $f(x)$ . Por lo tanto,

$$F'(x) = \frac{dF(x)}{dx} = f(x)$$

### La integral indefinida

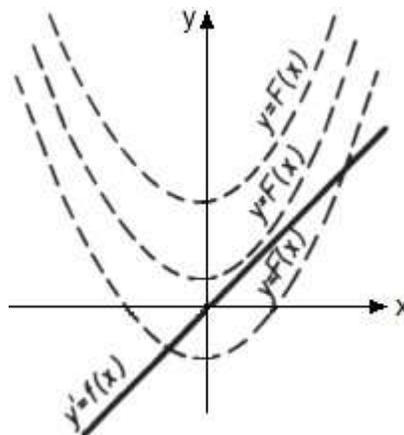
$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

$C$  es una constante indeterminada que desaparece al derivar, ya que la derivada de una constante es igual a cero.

### Significado geométrico de la integral indefinida

Como muestra la figura, hay una infinidad de curvas  $y = F(x)$  con pendiente o derivada  $y' = f(x)$ . Todas las curvas  $y = f(x)$  son iguales pero desplazadas paralelamente y en la dirección del eje  $y$ . La constante  $C$  fija una curva determinada. Si la curva debe pasar por el punto  $x_0, y_0$  se tendrá:

$$C = y_0 - F(x_0)$$



**Formulario para el sustentante del**

Examen General para el Egreso de la Licenciatura en Ingeniería Electrónica (EGEL-IELECTRO)

**Dirección del Programa de Evaluación de Egreso (EGEL) Diseño, Ingenierías y Arquitectura**

**La integral definida**

La integral definida tiene la forma:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

En la integral resultante se sustituye primero el límite superior y luego el inferior, y se resta el segundo resultado del primero. Desaparece así la constante C.

**Reglas de integración****Formas fundamentales**

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$$\int e^u du = e^u + C$$

$$\int u^n du = \frac{1}{n+1} u^{n+1} + C \quad n \neq -1$$

$$\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$$

$$\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$$

**Formas trigonométricas**

$$\int \operatorname{sen} u du = -\cos u + C$$

$$\int \operatorname{csc} u \cot u du = -\operatorname{csc} u + C$$

$$\int \cos u du = \operatorname{sen} u + C$$

$$\int \tan u du = \ln|\sec u| + C$$

$$\int \sec^2 u du = \tan u + C$$

$$\int \cot u du = \ln|\operatorname{sen} u| + C$$

$$\int \operatorname{csc}^2 u du = -\cot u + C$$

$$\int \sec u du = \ln|\sec u + \tan u| + C$$

$$\int \sec u \tan u du = \sec u + C$$

$$\int \operatorname{csc} u du = \ln|\operatorname{csc} u - \cot u| + C$$

**Formas cuadráticas**

$$\int \sqrt{a^2 + u^2} du = \frac{u}{2} \sqrt{a^2 + u^2} + \frac{a^2}{2} \ln|u + \sqrt{a^2 + u^2}| + C$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \operatorname{sen}^{-1} \frac{u}{a} + C$$

$$\int u \sqrt{a + bu} du = \frac{2}{15b^2} (3bu - 2a)(a + bu)^{3/2} + C$$

$$\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{u}{a} + C$$

$$\int \frac{\sqrt{a^2 + u^2}}{u} du = \sqrt{a^2 + u^2} - a \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2 + u^2}}{u} \right| + C$$

$$\int \frac{du}{u \sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \operatorname{sec}^{-1} \frac{u}{a} + C$$

$$\int \frac{du}{u^2 \sqrt{a^2 + u^2}} = -\frac{\sqrt{a^2 + u^2}}{a^2 u} + C$$

$$\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u+a}{u-a} \right| + C$$

$$\int \frac{du}{(a^2 + u^2)^{3/2}} = \frac{u}{a^2 \sqrt{a^2 + u^2}} + C$$

$$\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u-a}{u+a} \right| + C$$

**Formulario para el sustentante del**

Examen General para el Egreso de la Licenciatura en Ingeniería Electrónica (EGEL-IELECTRO)

**Dirección del Programa de Evaluación de Egreso (EGEL) Diseño, Ingenierías y Arquitectura**

$$\int \frac{\sqrt{a^2 + u^2}}{u^2} du = -\frac{\sqrt{a^2 + u^2}}{u} + \ln|u + \sqrt{a^2 + u^2}| + C$$

$$\int \frac{du}{u\sqrt{a^2 + u^2}} = -\frac{1}{a} \ln \left| \frac{\sqrt{a^2 + u^2} + a}{u} \right| + C$$

$$\int u^2 \sqrt{a^2 - u^2} du = \frac{u}{8} (2u^2 - a^2) \sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^4}{8} \sin^{-1} \frac{u}{a} + C$$

$$\int \sqrt{a^2 - u^2} du = \frac{u}{2} \sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2} \sin^{-1} \frac{u}{a} + C$$

$$\int \frac{u^2 du}{\sqrt{a^2 + u^2}} = \frac{u}{2} \sqrt{a^2 + u^2} - \frac{a^2}{2} \ln|u + \sqrt{a^2 + u^2}| + C$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 + u^2}} = \ln|u + \sqrt{a^2 + u^2}| + C$$

$$\int \sqrt{u^2 - a^2} du = \frac{u}{2} \sqrt{u^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \ln|u + \sqrt{u^2 - a^2}| + C$$

$$\int \frac{u^2 du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = -\frac{u}{2} \sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2} \sin^{-1} \frac{u}{a} + C$$

$$\int \frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{u} du = \sqrt{a^2 - u^2} - a \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2 - u^2}}{u} \right| + C$$

$$\int \frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{u^2} du = -\frac{1}{u} \sqrt{a^2 - u^2} - \sin^{-1} \frac{u}{a} + C$$

$$\int \frac{du}{u\sqrt{a^2 - u^2}} = -\frac{1}{a} \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2 - u^2}}{u} \right| + C$$

$$\int \frac{u^n du}{\sqrt{a + bu}} = \frac{2u^n \sqrt{a + bu}}{b(2n+1)} - \frac{2na}{b(2n+1)} \int \frac{u^{n-1} du}{\sqrt{a + bu}}$$

$$\int \frac{du}{u^2 \sqrt{a^2 - u^2}} = -\frac{1}{a^2 u} \sqrt{a^2 - u^2} + C$$

$$\int \frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{u} du = \sqrt{u^2 - a^2} - a \cos^{-1} \frac{a}{u} + C$$

$$\int \frac{u^2 du}{(a + bu)^2} = \frac{1}{b^3} \left( a + bu - \frac{a^2}{a + bu} - 2a \ln|a + bu| \right) + C$$

$$\int \frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{u^2} du = -\frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{u} + \ln|u + \sqrt{u^2 - a^2}| + C$$

$$\int \frac{du}{(a^2 - u^2)^{3/2}} = \frac{u}{a^2 \sqrt{a^2 - u^2}} + C$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \ln|u + \sqrt{u^2 - a^2}| + C$$

$$\int \frac{u^2 du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{u}{2} \sqrt{u^2 - a^2} + \frac{a^2}{2} \ln|u + \sqrt{u^2 - a^2}| + C$$

$$\int \frac{udu}{a + bu} = \frac{1}{b^2} (a + bu - a \ln|a + bu|) + C$$

$$\int \frac{du}{u^n \sqrt{a + bu}} = -\frac{\sqrt{a + bu}}{a(n-1)u^{n-1}} - \frac{b(2n-3)}{2a(n-1)} \int \frac{du}{u^{n-1} \sqrt{a + bu}}$$

$$\int \frac{du}{u^2 \sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{a^2 u} + C$$

$$\int \frac{udu}{\sqrt{a + bu}} = \frac{2}{3b^2} (bu - 2a) \sqrt{a + bu}$$

$$\int \frac{du}{(u^2 - a^2)^{3/2}} = -\frac{u}{a^2 \sqrt{u^2 - a^2}} + C$$

$$\int \frac{du}{u(a + bu)} = \frac{1}{a} \ln \left| \frac{u}{a + bu} \right| + C$$

$$\int \frac{du}{u\sqrt{a + bu}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \left| \frac{\sqrt{a + bu} - \sqrt{a}}{\sqrt{a + bu} + \sqrt{a}} \right| + C, \text{ si } a > 0$$

$$= \frac{2}{\sqrt{-a}} \tan^{-1} \sqrt{\frac{a + bu}{-a}} + C, \text{ si } a < 0$$

$$\int \frac{du}{u^2(a+bu)} = -\frac{1}{au} + \frac{b}{a^2} \ln \left| \frac{a+bu}{u} \right| + C$$

$$\int \frac{\sqrt{a+bu}}{u} du = 2\sqrt{a+bu} + a \int \frac{du}{u\sqrt{a+bu}}$$

$$\int \frac{udu}{(a+bu)^2} = \frac{a}{b^2(a+bu)} + \frac{1}{b} \ln|a+bu| + C$$

$$\int \frac{\sqrt{a+bu}}{u^2} du = -\frac{\sqrt{a+bu}}{u} + \frac{b}{2} \int \frac{du}{u\sqrt{a+bu}}$$

$$\int \frac{du}{u(a+bu)^2} = \frac{1}{a(a+bu)} - \frac{1}{a^2} \ln \left| \frac{a+bu}{u} \right| + C$$

$$\int (a^2 - u^2)^{3/2} du = -\frac{u}{8}(2u^2 - 5a^2)\sqrt{a^2 - u^2} + \frac{3a^4}{8} \sin^{-1} \frac{u}{a} + C$$

$$\int u^2 \sqrt{a^2 + u^2} du = \frac{u}{8}(a^2 + 2u^2)\sqrt{a^2 + u^2} - \frac{a^2}{8} \ln|u + \sqrt{a^2 + u^2}| + C$$

$$\int \frac{u^2 du}{a+bu} = \frac{1}{2b^3} \left[ (a+bu)^2 - 4a(a+bu) + 2a^2 \ln|a+bu| \right] + C$$

$$\int u^2 \sqrt{u^2 - a^2} du = \frac{u}{8}(2u^2 - a^2)\sqrt{u^2 - a^2} - \frac{a^4}{8} \ln|u + \sqrt{u^2 - a^2}| + C$$

### Otras formas trigonométricas

$$\int \csc^3 u du = -\frac{1}{2} \csc u \cot u + \frac{1}{2} \ln|\csc u - \cot u| + C$$

$$\int \sin^2 u du = \frac{1}{2} u - \frac{1}{4} \sin 2u + C$$

$$\int \sin^n u du = -\frac{1}{n} \sin^{n-1} u \cos u + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} u du$$

$$\int \cos^2 u du = \frac{1}{2} u + \frac{1}{4} \sin 2u + C$$

$$\int \cos^n u du = \frac{1}{n} \cos^{n-1} u \sin u + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} u du$$

$$\int \tan^2 u du = \tan u - u + C$$

$$\int \tan^n u du = \frac{1}{n-1} \tan^{n-1} u - \int \tan^{n-2} u du$$

$$\int \cot^2 u du = -\cot u - u + C$$

$$\int \cot^n u du = \frac{-1}{n-1} \cot^{n-1} u - \int \cot^{n-2} u du$$

$$\int \sin^3 u du = -\frac{1}{3} (2 + \sin^2 u) \cos u + C$$

$$\int \sec^n u du = \frac{1}{n-1} \tan u \sec^{n-2} u + \frac{n-2}{n-1} \int \sec^{n-2} u du$$

$$\int \cos^3 u du = \frac{1}{3} (2 + \cos^2 u) \sin u + C$$

$$\int \csc^n u du = \frac{1}{n-1} \cot u \csc^{n-2} u + \frac{n-2}{n-1} \int \csc^{n-2} u du$$

$$\int \tan^3 u du = \frac{1}{2} \tan^2 u + \ln|\cos u| + C$$

$$\int \sin au \sin bu du = \frac{\sin(a-b)u}{2(a-b)} - \frac{\sin(a+b)u}{2(a+b)} + C$$

$$\int \cot^3 u du = -\frac{1}{2} \cot^2 u - \ln|\sin u| + C$$

$$\int \cos au \cos bu du = \frac{\sin(a-b)u}{2(a-b)} + \frac{\sin(a+b)u}{2(a+b)} + C$$

$$\int \sec^3 u du = \frac{1}{2} \sec u \tan u + \frac{1}{2} \ln|\sec u + \tan u| + C$$

$$\int u^n \cos u du = u^n \sin u - n \int u^{n-1} \sin u du$$

$$\int \sin au \cos bu du = -\frac{\cos(a-b)u}{2(a-b)} - \frac{\cos(a+b)u}{2(a+b)} + C$$

**Formulario para el sustentante del**

Examen General para el Egreso de la Licenciatura en Ingeniería Electrónica (EGEL-IELECTRO)

**Dirección del Programa de Evaluación de Egreso (EGEL) Diseño, Ingenierías y Arquitectura**

$$\int u \operatorname{sen} u \, du = \operatorname{sen} u - u \cos u + C$$

$$\int u \cos u \, du = \cos u + u \operatorname{sen} u + C$$

$$\int u \cos^{-1} u \, du = \frac{2u^2 - 1}{4} \cos^{-1} u - \frac{u\sqrt{1-u^2}}{4} + C$$

$$\int u^n \operatorname{sen}^{-1} u \, du = \frac{1}{n+1} \left[ u^{n+1} \operatorname{sen}^{-1} u - \int \frac{u^{n+1} du}{\sqrt{1-u^2}} \right], \quad n \neq -1$$

$$\int u^n \cos^{-1} u \, du = \frac{1}{n+1} \left[ u^{n+1} \cos^{-1} u + \int \frac{u^{n+1} du}{\sqrt{1-u^2}} \right], \quad n \neq -1$$

$$\int u^n \tan^{-1} u \, du = \frac{1}{n+1} \left[ u^{n+1} \tan^{-1} u - \int \frac{u^{n+1} du}{\sqrt{1+u^2}} \right], \quad n \neq -1$$

$$\int \operatorname{sen}^n u \cos^m u \, du$$

$$= -\frac{\operatorname{sen}^{n-1} u \cos^{m+1} u}{n+m} + \frac{n-1}{n+m} \int \operatorname{sen}^{n-2} u \cos^m u \, du$$

$$= -\frac{\operatorname{sen}^{n+1} u \cos^{m-1} u}{n+m} + \frac{m-1}{n+m} \int \operatorname{sen}^n u \cos^{m-2} u \, du$$

$$\int u^n \operatorname{sen} u \, du = u^n \cos u + n \int u^{n-1} \cos u \, du$$

$$\int u \tan^{-1} u \, du = \frac{u^2 + 1}{2} \tan^{-1} u - \frac{u}{2} + C$$

$$\int \operatorname{sen}^{-1} u \, du = u \operatorname{sen}^{-1} u + \sqrt{1-u^2} + C$$

$$\int \cos^{-1} u \, du = u \cos^{-1} u - \sqrt{1-u^2} + C$$

$$\int \tan^{-1} u \, du = u \tan^{-1} u - \frac{1}{2} \ln(1+u^2) + C$$

**Formas exponenciales y logarítmicas**

$$\int u e^{au} \, du = \frac{1}{a^2} (au - 1) e^{au} + C$$

$$\int u^n e^{au} \, du = \frac{1}{a} u^n e^{au} - \frac{n}{a} \int u^{n-1} e^{au} \, du$$

$$\int e^{au} \operatorname{sen} bu \, du = \frac{e^{au}}{a^2 + b^2} (a \operatorname{sen} bu - b \cos bu) + C$$

$$\int e^{au} \cos bu \, du = \frac{e^{au}}{a^2 + b^2} (a \cos bu + b \operatorname{sen} bu) + C$$

$$\int \ln u \, du = u \ln u - u + C$$

$$\int u^n \ln u \, du = \frac{u^{n+1}}{(n+1)^2} [(n+1) \ln u - 1] + C$$

$$\int \frac{1}{u \ln u} \, du = \ln |\ln u| + C$$

**Formas hiperbólicas**

$$\int \operatorname{senh} u \, du = \cosh u + C$$

$$\int \cosh u \, du = \operatorname{senh} u + C$$

$$\int \tanh u \, du = \ln |\cosh u| + C$$

$$\int \coth u \, du = \ln |\operatorname{senh} u| + C$$

$$\int \operatorname{sech} u \, du = \tan^{-1} |\operatorname{senh} u| + C$$

$$\int \operatorname{sech} u \, du = \ln \left| \tan \frac{1}{2} u \right| + C$$

$$\int \operatorname{sech}^2 u \, du = \tanh u + C$$

$$\int \operatorname{csch}^2 u \, du = -\coth u + C$$

$$\int \operatorname{sech} u \tanh u \, du = -\operatorname{sech} u + C$$

$$\int \operatorname{csch} u \coth u \, du = -\operatorname{csch} u + C$$

**Otras formas cuadráticas**

$$\int \sqrt{2au - u^2} du = \frac{u-a}{2} \sqrt{2au - u^2} + \frac{a^2}{2} \cos^{-1} \left( \frac{a-u}{a} \right) + C \quad \int \frac{du}{\sqrt{2au - u^2}} = \cos^{-1} \left( \frac{a-u}{a} \right) + C$$

$$\int \frac{\sqrt{2au - u^2}}{u^2} du = -\frac{2\sqrt{2au - u^2}}{u} - \cos^{-1} \left( \frac{a-u}{a} \right) + C \quad \int \frac{u du}{\sqrt{2au - u^2}} = -\sqrt{2au - u^2} + a \cos^{-1} \left( \frac{a-u}{a} \right) + C$$

$$\int \frac{\sqrt{2au - u^2}}{u^2} du = \sqrt{2au - u^2} + a \cos^{-1} \left( \frac{a-u}{a} \right) + C \quad \int \frac{du}{u\sqrt{2au - u^2}} = -\frac{\sqrt{2au - u^2}}{au} + C$$

$$\int \frac{u^2 du}{\sqrt{2au - u^2}} = -\frac{(u+3a)}{2} \sqrt{2au - u^2} + \frac{3a^2}{2} \cos^{-1} \left( \frac{a-u}{a} \right) + C$$

$$\int u\sqrt{2au - u^2} du = \frac{2u - au - 3a^2}{6} \sqrt{2au - u^2} + \frac{a^3}{2} \cos^{-1} \left( \frac{a-u}{a} \right) + C$$

**Formulario para el sustentante del**

Examen General para el Egreso de la Licenciatura en Ingeniería Electrónica (EGEL-IELECTRO)

**Dirección del Programa de Evaluación de Egreso (EGEL) Diseño, Ingenierías y Arquitectura**

**Regla de Simpson**

Para curvas hasta de tercer grado

$$A_i = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$$

Para curvas de grado mayor que el tercero

$$A = \frac{h}{3} [y_0 + y_n + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{n-2}) + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{n-1})]$$

**Integrales múltiples**

$$\int_{x=a}^b \int_{y=f_1(x)}^{f_2(x)} F(x, y) dy dx = \int_{x=a}^b \left\{ \int_{y=f_1(x)}^{f_2(x)} F(x, y) dy \right\} dx$$

donde  $y = f_1(x)$  e  $y = f_2(x)$  son las ecuaciones de las curvas HPG y PGQ respectivamente, mientras que a y b son las abscisas de los puntos P y Q. Esta integral también se puede escribir así:

$$\int_{y=c}^d \int_{x=g_1(y)}^{g_2(y)} F(x, y) dx dy = \int_{y=c}^d \left\{ \int_{x=g_1(y)}^{g_2(y)} F(x, y) dx \right\} dy$$

donde  $x = g_1(y)$ ,  $x = g_2(y)$  son las ecuaciones de las curvas HPG yPGQ, respectivamente, mientras que c y d son las ordenadas de H y G.

Estas son las llamadas integrales dobles o integrales de área. Los anteriores conceptos se pueden ampliar para considerar integrales triples o de volumen así como integrales múltiples en más de tres dimensiones.

$$s = s(t) = \int_a^t \|\vec{r}'(t)\| dt$$

Es la longitud de curva correspondiente al intervalo paramétrico  $[a, t]$ .

	<b>En parámetro arbitrario:</b>	<b>En parámetro s:</b>
Vector tangente unitario	$\vec{t}(t) = \frac{\vec{r}'(t)}{\ \vec{r}'(t)\ }$	$\vec{t}(s) = \frac{\dot{\vec{r}}(s)}{\ \dot{\vec{r}}(s)\ }$
Vector normal principal	$\vec{n}(t) = \vec{b}(t) \times \vec{t}(t)$	$\vec{n}(s) = \frac{\ddot{\vec{r}}(s)}{\ \ddot{\vec{r}}(s)\ }$
Vector binormal	$\vec{b}(t) = \frac{\vec{r}' \times \vec{r}''(t)}{\ \vec{r}' \times \vec{r}''(t)\ }$	$\vec{b}(s) = \frac{\dot{\vec{r}}(s) \times \ddot{\vec{r}}(s)}{\ \dot{\vec{r}}(s) \times \ddot{\vec{r}}(s)\ }$

Los vectores unitarios  $\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}$  forman una triada positiva ( $\vec{b} = \vec{t} \times \vec{n}, \vec{n} = \vec{b} \times \vec{t}, \vec{t} = \vec{n} \times \vec{b}$ )

### Recta tangente en $t_0$

Ecuación vectorial

$$\vec{r}(\lambda) = \vec{r}(t_0) + \lambda \vec{r}'(t_0)$$

Ecuación paramétrica

$$\frac{x - x_0}{x'_0} = \frac{y - y_0}{y'_0} = \frac{z - z_0}{z'_0}$$

### Plano oscilador ( $\vec{t}, \vec{n}$ ) en $t_0$

Ecuación vectorial

$$(\vec{r} - \vec{r}(t_0)) \cdot (\vec{r}'(t_0) \times \vec{r}''(t_0)) = 0$$

Ecuación paramétrica

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x'_0 & y'_0 & z'_0 \\ x''_0 & y''_0 & z''_0 \end{vmatrix} = 0$$

### Curvatura y torsión

$$\kappa = \frac{y''}{[1 + (y')^2]^{\frac{3}{2}}}$$

$$\kappa(t) = \frac{\|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)\|}{\|\vec{r}'(t)\|^3}$$

$$\tau(t) = \frac{\vec{r}'(t) \cdot (\vec{r}''(t) \times \vec{r}'''(t))}{\|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)\|^2}$$

$$\kappa(s) = \|\ddot{\vec{r}}(s)\|$$

$$\frac{d}{ds} \vec{T} = \kappa \vec{N}$$

$$\frac{d}{ds} \vec{N} = \tau \vec{B} - \kappa \vec{T}$$

$$\frac{d}{ds} \vec{B} = -\tau \vec{N}$$

### Plano normal

Ecuación vectorial

$$(\vec{r} - \vec{r}(t_0)) \cdot \vec{r}'(t_0) = 0$$

Ecuación paramétrica

$$x'_0(x - x_0) + y'_0(y - y_0) + z'_0(z - z_0) = 0$$

### Plano rectificante ( $\vec{t}, \vec{b}$ ) en $t_0$

Ecuación vectorial

$$(\vec{r} - \vec{r}(t_0)) \cdot \vec{n}(t_0) = 0$$

Ecuación paramétrica

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x'_0 & y'_0 & z'_0 \\ y'_0 z''_0 - y''_0 z'_0 & z'_0 x''_0 - z''_0 x'_0 & x'_0 y''_0 - x''_0 y'_0 \end{vmatrix} = 0$$

**Formulario para el sustentante del**

Examen General para el Egreso de la Licenciatura en Ingeniería Electrónica (EGEL-IELECTRO)

**Dirección del Programa de Evaluación de Egreso (EGEL) Diseño, Ingenierías y Arquitectura****Componentes tangencial y normal de la aceleración**

$$a_T = \vec{a} \cdot \vec{T} = \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{\|\vec{v}\|}$$

$$a_N = \vec{a} \cdot \vec{N} = \frac{\|\vec{v} \times \vec{a}\|}{\|\vec{v}\|}$$

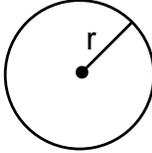
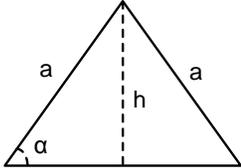
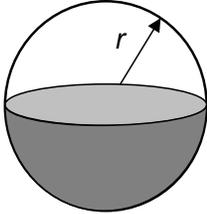
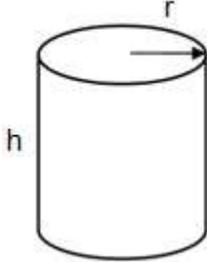
**Propiedades de la divergencia**

$$i) \operatorname{div}(\vec{F} + \vec{G}) = \operatorname{div}(\vec{F}) + \operatorname{div}(\vec{G})$$

$$ii) \operatorname{div}(\phi \vec{F}) = \phi \operatorname{div}(\vec{F}) + (\operatorname{grad} \phi) \cdot \vec{F}$$

$$iii) \operatorname{div}(\vec{F} + \vec{G}) = \vec{G} \cdot [\operatorname{rot}(\vec{F})] - \vec{F} \cdot [\operatorname{rot}(\vec{G})]$$

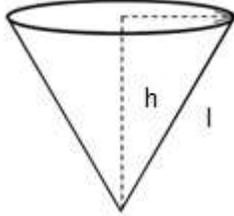
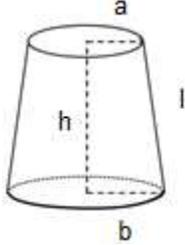
## Geometría

Áreas	
Círculo	$A = \pi r^2$
	
Trapezio	$A = \frac{B+b}{2} h$
	
Triángulo	$A = \frac{ab \operatorname{sen} \alpha}{2} = \frac{bh}{2}$
	
Volúmenes	
Prismas	$V = S_B h$
	donde $S_B$ = área de la base
Pirámides	$V = \frac{S_B h}{3}$
	donde $S_B$ = área de la base
Esfera	$V = \frac{4}{3} \pi r^3$
	$A = 4\pi r^2$
	
Cilindro	$V = \pi r^2 h$
	$A = 2\pi r h$
	

**Formulario para el sustentante del**

Examen General para el Egreso de la Licenciatura en Ingeniería Electrónica (EGEL-IELECTRO)

**Dirección del Programa de Evaluación de Egreso (EGEL) Diseño, Ingenierías y Arquitectura**

<p>Cono</p> $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$ $A = \pi r \sqrt{r^2 + h^2} = \pi r l$	 <p>A diagram of a cone. A vertical dashed line from the center of the top circular base to the apex is labeled 'h'. A solid line along the side of the cone from the apex to the edge of the top base is labeled 'l'.</p>
$V = \frac{1}{3} \pi h (a^2 + ab + b^2)$ $A = \begin{cases} \pi(a+b) \sqrt{h^2 + (b-a)^2} \\ \pi(a+b)l \end{cases}$	 <p>A diagram of a frustum of a cone. The top circular base has radius 'a' and the bottom circular base has radius 'b'. A vertical dashed line between the centers of the two bases is labeled 'h'. A solid line along the side of the frustum is labeled 'l'.</p>

**Geometría analítica plana****Distancia entre dos puntos**

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

**Pendiente de una recta**

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

**Ecuación de una recta**

$$y - y_1 = m(x - x_1); \quad Ax + By + C = 0$$

**Ángulo entre rectas**

$$\tan \theta = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$$

**Circunferencia**

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2; \quad Ax^2 + Ay^2 + Dx + Ey + F = 0$$

**Parábola**

Eje vertical	$(x - h)^2 = 4p(y - k);$	$Ax^2 + Dx + Ey + F = 0$
--------------	--------------------------	--------------------------

Eje horizontal	$(y - k)^2 = 4p(x - h);$	$By^2 + Dx + Ey + F = 0$
	$LR = 4p \quad e = 1$	

**Elipse**

Eje focal horizontal	$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$	$; a > b$
----------------------	---	-----------

Eje focal vertical	$\frac{(x - h)^2}{b^2} + \frac{(y - k)^2}{a^2} = 1$	$; a > b$
--------------------	---	-----------

$$a^2 = b^2 + c^2; \quad LR = \frac{2b^2}{a}; \quad e = \frac{c}{a} < 1$$

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0; \quad AC > 0$$

**Hipérbola**

Eje focal horizontal  $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

Eje focal vertical  $\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$

$$c^2 = a^2 + b^2; \quad LR = \frac{2b^2}{a}; \quad e = \frac{c}{a} > 1$$

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0; \quad AC < 0$$

**Geometría analítica del espacio**

Considerando  $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$  y  $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$

**Vector que une  $P_1$  y  $P_2$**

$$\overline{P_1P_2} = \langle (x_2 - x_1), (y_2 - y_1), (z_2 - z_1) \rangle = (l, m, n)$$

**Distancia entre dos puntos**

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} = \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}$$

**Recta que pasa por dos puntos**

Forma paramétrica

$$x = x_1 + lt$$

$$y = y_1 + mt$$

$$z = z_1 + nt$$

Forma simétrica

$$t = \frac{x - x_1}{l}$$

$$t = \frac{y - y_1}{m}$$

$$t = \frac{z - z_1}{n}$$

Cosenos directores

$$\cos \alpha = \frac{x_2 - x_1}{d} = \frac{l}{d}$$

$$\cos \beta = \frac{y_2 - y_1}{d} = \frac{m}{d}$$

$$\cos \gamma = \frac{z_2 - z_1}{d} = \frac{n}{d}$$

donde  $\alpha, \beta, \gamma$  denotan los ángulos que forman la línea que une los puntos  $P_1$  y  $P_2$  con la parte positiva de los ejes x, y, z, respectivamente.

**Ecuación del plano**

- Que pasa por un punto  $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$  y tiene vector normal  $\vec{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ :

$$a_1(x - x_1) + a_2(y - y_1) + a_3(z - z_1) = 0$$

-Forma general:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

o

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1$$

**Formulario para el sustentante del**

Examen General para el Egreso de la Licenciatura en Ingeniería Electrónica (EGEL-IELECTRO)

**Dirección del Programa de Evaluación de Egreso (EGEL) Diseño, Ingenierías y Arquitectura**

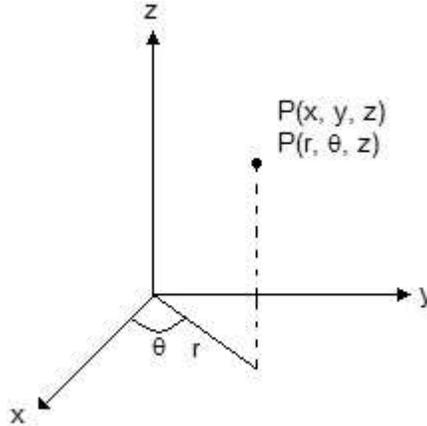
**Distancia del punto  $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$  al plano  $Ax + By + Cz + D = 0$**

$$d = \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

en la cual el signo debe escogerse de tal manera que la distancia no resulte negativa.

**Coordenadas cilíndricas**

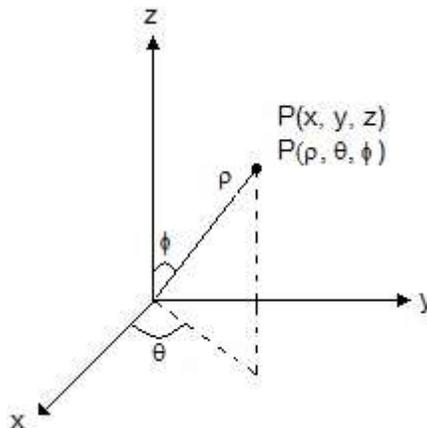
$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases} \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \\ z = z \end{cases}$$



**Coordenadas esféricas**

$$\begin{cases} x = \rho \sin \phi \cos \theta \\ y = \rho \sin \phi \sin \theta \\ z = \rho \cos \phi \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \\ \phi = \cos^{-1}\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right) \end{cases}$$



**Definiciones geométricas importantes**

Ángulo entre dos rectas en el plano	$\tan \alpha = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$
Producto escalar para $\vec{a}$ y $\vec{b}$ que pertenecen a $\mathbb{R}^3$	$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$
Producto vectorial	$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$
Producto mixto	$[\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}] = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$
Ángulo entre dos vectores	$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{ \vec{a}   \vec{b} }; \quad \text{sen} \theta = \frac{ \vec{a} \times \vec{b} }{ \vec{a}   \vec{b} }$
Ecuación vectorial de la recta	$\vec{p} = \vec{p}_o + t\vec{u}$
Ecuaciones paramétricas de la recta	$\begin{cases} x = x_o + at \\ y = y_o + bt \\ z = z_o + ct \end{cases} \quad \vec{u} = (a, b, c)$
Ecuaciones cartesianas de la recta, en forma simétrica	$\frac{x - x_o}{a} = \frac{y - y_o}{b} = \frac{z - z_o}{c}$ $\vec{u} = (a, b, c)$
Distancia de un punto Q a una recta	$d = \frac{ \vec{P}_o \vec{Q} \times \vec{u} }{ \vec{u} }$
Distancia entre dos rectas	$d = \frac{ \vec{P}_1 \vec{P}_2 \cdot (\vec{u}_1 \times \vec{u}_2) }{ \vec{u}_1 \times \vec{u}_2 }$
Ecuación vectorial de un plano	$\vec{p} = \vec{p}_o + r\vec{u} + s\vec{v}$
Ecuaciones paramétricas de un plano	$\begin{cases} x = x_o + ru_x + sv_x \\ y = y_o + ru_y + sv_y \\ z = z_o + ru_z + sv_z \end{cases}$
Ecuación cartesiana de un plano en forma general	$Ax + By + Cz + D = 0$ $\vec{N} = (A, B, C)$
Ecuación normal de un plano	$\vec{PoP} \cdot \vec{N} = 0; \quad \vec{N} = (A, B, C)$

**Formulario para el sustentante del**

Examen General para el Egreso de la Licenciatura en Ingeniería Electrónica (EGEL-IELECTRO)

**Dirección del Programa de Evaluación de Egreso (EGEL) Diseño, Ingenierías y Arquitectura**

Distancia de un punto Q a un plano	$d = \frac{ \overline{P_0Q} \cdot \overline{N} }{ \overline{N} }$
Ángulo entre una recta y un plano	$\text{sen}\alpha = \frac{ \overline{u} \cdot \overline{N} }{ \overline{u}   \overline{N} }$

## Trigonometría

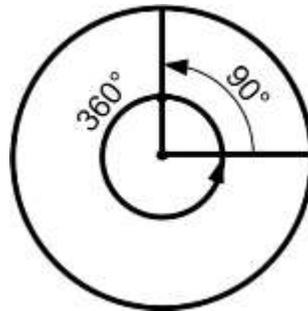
### Medida de ángulos planos

#### Representación

La medida de un ángulo puede expresarse en unidades comunes (grados) o en unidades de arco (radianes). Se representa a veces, respectivamente, por  $\alpha$  y  $\hat{\alpha}$ .

Unidades comunes (sexagesimales): grado ( $^{\circ}$ ), minuto ( $'$ ), segundo ( $''$ ).

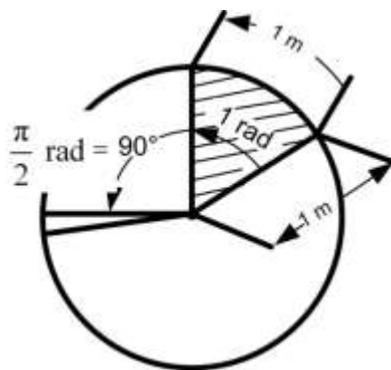
$$1^{\circ} = 60'; 1' = 60''$$



#### Unidad de arco

1 radián (rad) es el ángulo central de una circunferencia de radio unitario que intercepta un arco también unitario. Por lo tanto:

$$1 \text{ rad} = \frac{1 \text{ m}}{1 \text{ m}} = 1(\text{número adimensional})$$



Con frecuencia no se indica específicamente la unidad, como en la siguiente tabla.

$\alpha$	$0^{\circ}$	$30^{\circ}$	$45^{\circ}$	$60^{\circ}$	$75^{\circ}$	$90^{\circ}$	$180^{\circ}$	$270^{\circ}$	$360^{\circ}$
$\hat{\alpha}$	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$5\pi/12$	$\pi/2$	$\pi$	$3\pi/2$	$2\pi$
	0	0.52	0.78	1.05	1.31	1.57	3.14	4.71	6.28

**Formulario para el sustentante del**

Examen General para el Egreso de la Licenciatura en Ingeniería Electrónica (EGEL-IELECTRO)

**Dirección del Programa de Evaluación de Egreso (EGEL) Diseño, Ingenierías y Arquitectura****Equivalencias**

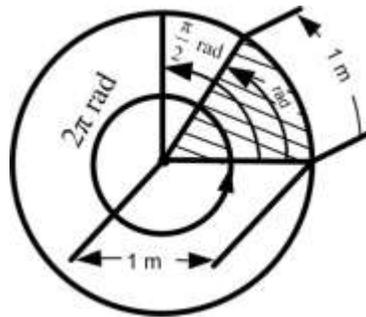
Por definición:

$$360^\circ = 2\pi \text{ rad}, 1 \text{ rad} = \frac{180^\circ}{\pi} = 57.2967^\circ$$

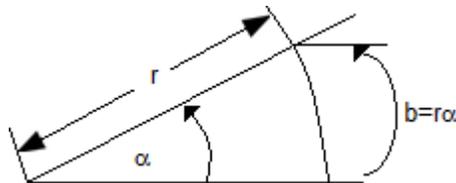
$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad} = 0.017453 \text{ rad}$$

$$\hat{\alpha} = \frac{\pi}{180} \alpha = \frac{\alpha}{57.2967}$$

$$\hat{\alpha} = \text{arc } \alpha = \frac{\text{longitud de arco}}{\text{radio}}$$



La longitud de un arco ( $b$ ) es el producto del radio  $r$  y el ángulo central  $\hat{\alpha}$  (en radianes) de la circunferencia:  $b = r\hat{\alpha}$

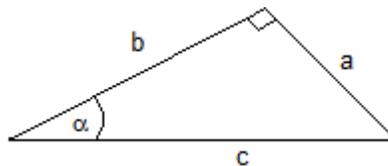
**Funciones trigonométricas**

En un triángulo rectángulo:

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{c}$$

$$\operatorname{cos} \alpha = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{c}$$

$$\operatorname{tan} \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{a}{b}$$



### Operaciones con funciones trigonométricas

$$\operatorname{sen}^2 A + \operatorname{cos}^2 A = 1$$

$$\operatorname{sec}^2 A - \operatorname{tan}^2 A = 1$$

$$\operatorname{csc}^2 A - \operatorname{cot}^2 A = 1$$

$$\operatorname{tan} A = \frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{cos} A}$$

$$\operatorname{cot} A = \frac{\operatorname{cos} A}{\operatorname{sen} A}$$

$$\operatorname{sen} A \operatorname{csc} A = 1$$

$$\operatorname{cos} A \operatorname{sec} A = 1$$

$$\operatorname{tan} A \operatorname{cot} A = 1$$

$$\operatorname{sen}(-A) = -\operatorname{sen} A$$

$$\operatorname{cos}(-A) = \operatorname{cos} A$$

$$\operatorname{tan}(-A) = -\operatorname{tan} A$$

$$\operatorname{sen}^2 A = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{cos} 2A$$

$$\operatorname{cos}^2 A = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{cos} 2A$$

$$\operatorname{sen} 2A = 2 \operatorname{sen} A \operatorname{cos} A$$

$$\operatorname{cos} 2A = \operatorname{cos}^2 A - \operatorname{sen}^2 A$$

$$\operatorname{sen}(A \pm B) = \operatorname{sen} A \operatorname{cos} B \pm \operatorname{cos} A \operatorname{sen} B$$

$$\operatorname{cos}(A \pm B) = \operatorname{cos} A \operatorname{cos} B \pm \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B$$

$$\operatorname{tan}(A \pm B) = \frac{\operatorname{tan} A \pm \operatorname{tan} B}{1 \pm \operatorname{tan} A \operatorname{tan} B}$$

$$\operatorname{sen} \frac{A}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \operatorname{cos} A}{2}}$$

$$\operatorname{cos} \frac{A}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \operatorname{cos} A}{2}}$$

$$\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B = \frac{1}{2} [\operatorname{cos}(A - B) - \operatorname{cos}(A + B)]$$

$$\operatorname{sen} A \operatorname{cos} B = \frac{1}{2} [\operatorname{sen}(A - B) + \operatorname{sen}(A + B)]$$

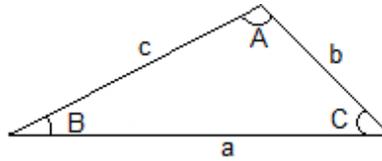
$$\operatorname{cos} A \operatorname{cos} B = \frac{1}{2} [\operatorname{cos}(A - B) + \operatorname{cos}(A + B)]$$

**Formulario para el sustentante del**

Examen General para el Egreso de la Licenciatura en Ingeniería Electrónica (EGEL-IELECTRO)

**Dirección del Programa de Evaluación de Egreso (EGEL) Diseño, Ingenierías y Arquitectura**

Las leyes siguientes son válidas para cualquier triángulo plano ABC de lados a, b, c y de ángulos A, B, C.

**Ley de los senos**

$$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C}$$

**Ley de los cosenos**

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

Los otros lados y ángulos están relacionados en forma similar

**Ley de las tangentes**

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\tan \frac{1}{2}(A+B)}{\tan \frac{1}{2}(A-B)}$$

Los otros lados y ángulos están relacionados en forma similar

**Teorema de Pitágoras**

$$a^2 + b^2 = c^2$$

**Valores de las funciones de ángulos importantes**

$\theta$	$\text{sen } \theta$	$\text{cos } \theta$	$\text{tan } \theta$	$\text{cot } \theta$	$\text{sec } \theta$	$\text{csc } \theta$
$0^\circ$	0	1	0	$\infty$	1	$\infty$
$30^\circ$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2
$45^\circ$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
$60^\circ$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$
$90^\circ$	1	0	$\infty$	0	$\infty$	1

**Relaciones entre ángulo simple, ángulo doble y mitad de ángulo**

$\text{sen } \alpha$	$\text{cos } \alpha$	$\text{tan } \alpha$	$\text{cot } \alpha$
$\text{cos}(90^\circ - \alpha)$	$= \text{sen}(90^\circ - \alpha)$	$= \text{cot}(90^\circ - \alpha)$	$= \text{tan}(90^\circ - \alpha)$
$= \sqrt{1 - \text{cos}^2 \alpha}$	$= \sqrt{1 - \text{sen}^2 \alpha}$	$= \frac{1}{\text{cot } \alpha}$	$= \frac{1}{\text{tan } \alpha}$
$= 2 \text{sen} \frac{\alpha}{2} \cdot \text{cos} \frac{\alpha}{2}$	$= \text{cos}^2 \frac{\alpha}{2} - \text{sen}^2 \frac{\alpha}{2}$	$= \frac{\text{sen } \alpha}{\text{cos } \alpha}$	$= \frac{\text{cos } \alpha}{\text{sen } \alpha}$
$= \frac{\text{tan } \alpha}{\sqrt{1 + \text{tan}^2 \alpha}}$	$= \frac{\text{cot } \alpha}{\sqrt{1 + \text{cot}^2 \alpha}}$	$= \frac{\text{sen } \alpha}{\sqrt{1 - \text{sen}^2 \alpha}}$	$= \frac{\text{cos } \alpha}{\sqrt{1 - \text{cos}^2 \alpha}}$
$= \sqrt{\text{cos}^2 \alpha - \text{cos} 2\alpha}$	$= 1 - 2 \text{sen}^2 \frac{\alpha}{2}$	$= \sqrt{\frac{1}{\text{cos}^2 \alpha} - 1}$	$= \sqrt{\frac{1}{\text{sen}^2 \alpha} - 1}$
$= \frac{1}{\sqrt{1 + \text{cot}^2 \alpha}}$	$= \frac{1}{\sqrt{1 + \text{tan}^2 \alpha}}$	$= \frac{2 \text{tan} \frac{\alpha}{2}}{1 - \text{tan}^2 \frac{\alpha}{2}}$	$= \frac{\text{cot}^2 \frac{\alpha}{2} - 1}{2 \text{cot} \frac{\alpha}{2}}$
$= \frac{2 \text{tan} \frac{\alpha}{2}}{1 + \text{tan}^2 \frac{\alpha}{2}}$	$= \frac{1 - \text{tan}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \text{tan}^2 \frac{\alpha}{2}}$		

$\text{sen} 2\alpha$	$\text{cos} 2\alpha$	$\text{tan} 2\alpha$	$\text{cot} 2\alpha$
----------------------	----------------------	----------------------	----------------------

**Formulario para el sustentante del**

Examen General para el Egreso de la Licenciatura en Ingeniería Electrónica (EGEL-IELECTRO)

**Dirección del Programa de Evaluación de Egreso (EGEL) Diseño, Ingenierías y Arquitectura**

$= 2 \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \alpha$	$= \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha$ $= 2 \cos^2 \alpha - 1$ $= 1 - 2 \operatorname{sen}^2 \alpha$	$= \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$ $= \frac{2}{\cot \alpha - \tan \alpha}$	$= \frac{\cot^2 \alpha - 1}{2 \cot \alpha}$ $= \frac{1}{2} \cot \alpha - \frac{1}{2} \tan \alpha$
$\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}$	$\cos \frac{\alpha}{2}$	$\tan \frac{\alpha}{2}$	$\cot \frac{\alpha}{2}$
$= \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$	$= \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$	$= \frac{\operatorname{sen} \alpha}{1 + \cos \alpha}$ $= \frac{1 - \cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha}$ $= \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}$	$= \frac{\operatorname{sen} \alpha}{1 - \cos \alpha}$ $= \frac{1 + \cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha}$ $= \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}}$

**Números complejos****Forma trigonométrica o polar de un número complejo**

Se tiene que  $r = |z| = |(x, y)|$  y que  $\theta = \arg(z) = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$

Luego:

$$\begin{cases} \operatorname{sen} \theta = \frac{y}{r} \Rightarrow y = r \operatorname{sen} \theta \\ \cos \theta = \frac{x}{r} \Rightarrow x = r \cos \theta \end{cases}$$

Por lo tanto:

$$z = (x, y) = x + yi = r \cos \theta + i r \operatorname{sen} \theta = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$$

**Forma exponencial de un número complejo**

Sea  $z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$  un número complejo donde  $r$  es su módulo y  $\theta$  su argumento. Entonces mediante el empleo de la fórmula de Euler se obtiene:

$$z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) = r e^{i\theta}$$

**Operaciones de números complejos en forma polar**

$$(r_1 \angle \theta_1)(r_2 \angle \theta_2) = r_1 r_2 \angle (\theta_1 + \theta_2) \quad \text{Nota: } \angle \theta = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta$$

$$\sqrt[n]{r \angle \theta} = \sqrt[n]{r} \angle \frac{\theta + k(360^\circ)}{n}; \quad k \text{ entero}$$

$$\ln(r e^{i\theta}) = \ln r + (\theta + 2k\pi) i; \quad k \text{ entero}$$

**Teorema de De Moivre**

Siendo  $p$  un número real cualquiera, el teorema de De Moivre establece que

$$[r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)]^p = r^p (\cos p\theta + i \operatorname{sen} p\theta)$$

Sea  $n$  cualquier entero positivo y  $p = \frac{1}{n}$ , entonces:

$$\left[ r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) \right]^{1/n} = r^{1/n} \left[ \cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right]$$

donde  $k$  es un entero positivo. De aquí se pueden obtener las  $n$  raíces  $n$ -ésimas distintas de un número complejo haciendo  $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ .

**Análisis vectorial****Magnitud, dirección y componentes de vectores**

**Vector:** Representación de una cantidad física con magnitud y dirección.

Coordenadas del punto inicial  $A$  del vector  $\vec{a}$ :  $x_1, y_1, z_1$

Coordenadas del punto final  $B$  del vector  $\vec{a}$ :  $x_2, y_2, z_2$

Vectores unitarios sobre los ejes  $OX, OY, OZ$ :  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$

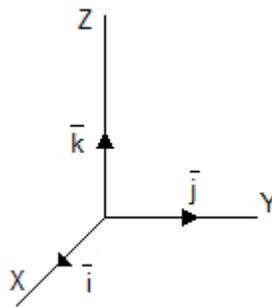
**Componentes escalares**

$$a_x, a_y, a_z \geq 0$$

$$a_x = x_2 - x_1$$

$$a_y = y_2 - y_1$$

$$a_z = z_2 - z_1$$

**Componentes vectoriales**

$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y + \vec{a}_z$$

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$$

**Magnitud de un vector:**  $|\vec{a}|$  (o bien,  $a$ )

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \quad (|\vec{a}| \text{ siempre } \geq 0)$$

**Cosenos directores de un vector:**  $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$

**Formulario para el sustentante del**

Examen General para el Egreso de la Licenciatura en Ingeniería Electrónica (EGEL-IELECTRO)

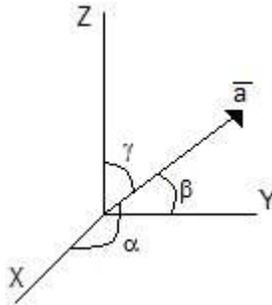
**Dirección del Programa de Evaluación de Egreso (EGEL) Diseño, Ingenierías y Arquitectura**

$\alpha, \beta, \gamma$  son los ángulos entre el vector  $\vec{a}$  y los ejes  $OX, OY, OZ$  ( $\alpha, \beta, \gamma = 0^\circ \dots 180^\circ$ )

$$\cos \alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}, \quad \cos \beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}, \quad \cos \gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}$$

Cálculo de las componentes. Si se conocen  $|\vec{a}|, \alpha, \beta, \gamma$ ,

$$a_x = |\vec{a}| \cos \alpha; \quad a_y = |\vec{a}| \cos \beta; \quad a_z = |\vec{a}| \cos \gamma$$



**Observación:** Operaciones vectoriales como la determinación de magnitudes, cosenos directores, sumas y productos se llevan a cabo con las componentes de los vectores a lo largo de los ejes  $OX, OY, OZ$

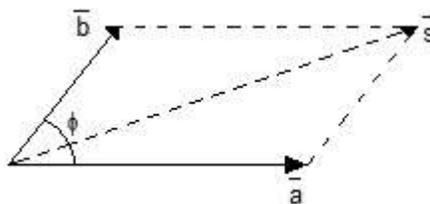
**Adición y sustracción de vectores**

Suma vectorial  $\vec{s}$  de dos vectores libres  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$

$$\vec{s} = \vec{a} + \vec{b} = s_x \vec{i} + s_y \vec{j} + s_z \vec{k}$$

$$s_x = a_x + b_x, s_y = a_y + b_y, s_z = a_z + b_z$$

$$|\vec{s}| = \sqrt{s_x^2 + s_y^2 + s_z^2}$$

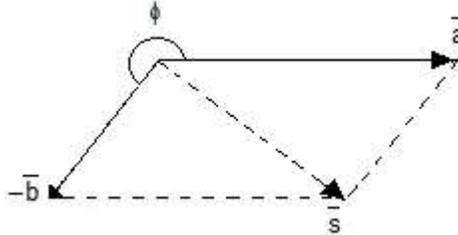


Diferencia vectorial  $\vec{s}$  de dos vectores libres  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$

$$\vec{s} = \vec{a} + (-\vec{b})$$

$$s_x = a_x - b_x, s_y = a_y - b_y, s_z = a_z - b_z$$

$$|\vec{s}| = \sqrt{s_x^2 + s_y^2 + s_z^2}$$



Valores importantes	$\phi$	$0^\circ; 360^\circ$	$90^\circ$	$180^\circ$	$270^\circ$
$ \vec{s} $ para 2 vectores	$ \vec{a}  \neq  \vec{b} $	$ \vec{a}  +  \vec{b} $	$\sqrt{ \vec{a} ^2 +  \vec{b} ^2}$	$ \vec{a}  -  \vec{b} $	$\sqrt{ \vec{a} ^2 +  \vec{b} ^2}$
	$ \vec{a}  =  \vec{b} $	$2 \vec{a} $	$ \vec{a} \sqrt{2}$	0	$ \vec{a} \sqrt{2}$

Suma vectorial  $\vec{s}$  de dos vectores libres  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$ ,  $-\vec{c}$ , etc.:

$$\vec{s} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c} + \dots = s_x \vec{i} + s_y \vec{j} + s_z \vec{k}$$

$$s_x = a_x + b_x - c_x + \dots, s_y = a_y + b_y - c_y + \dots, s_z = a_z + b_z - c_z + \dots$$

$$|\vec{s}| = \sqrt{s_x^2 + s_y^2 + s_z^2}$$

### Producto de un escalar por un vector

**Escalar:** Magnitud física sin dirección.

El producto escalar  $k$  con el vector  $\vec{a}$  da el vector  $\vec{c}$

$$\vec{c} = k \cdot \vec{a}$$

$$c_x = k \cdot a_x; c_y = k \cdot a_y; c_z = k \cdot a_z; c = k \cdot |\vec{a}|$$

Si  $k > 0$  entonces  $\vec{c} \uparrow \uparrow \vec{a}$  por lo que:



Si  $k < 0$  entonces  $\vec{c} \uparrow \downarrow \vec{a}$  por lo que:



**Productos de dos vectores libres**

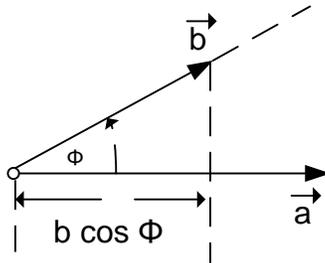
El producto escalar de dos vectores libres  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$  da el escalar  $k$

Símbolo del producto escalar: punto “ $\cdot$ ”

$$k = \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} = a \cdot b \cdot \cos \varphi = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \varphi$$

$$k = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z$$

$$\varphi = \cos^{-1} \frac{a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

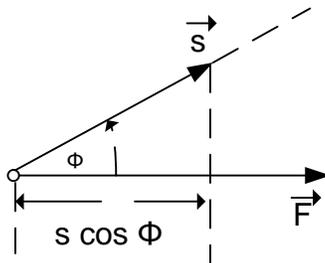


Valores importantes	$\varphi$	$0^\circ; 360^\circ$	$90^\circ$	$180^\circ$	$270^\circ$
	$ \vec{a}  \cdot  \vec{b}  \cos \varphi$	$+ \vec{a}  \cdot  \vec{b} $	0	$- \vec{a}  \cdot  \vec{b} $	0

Ejemplo: Trabajo  $W$  de una fuerza  $F$  en el desplazamiento  $s$

$$W = \text{Fuerza} \times \text{Desplazamiento} = \vec{F} \cdot \vec{s}$$

$$W = F s \cos \varphi$$



El producto vectorial de dos vectores libres  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$  da el vector  $\vec{c}$

Símbolo del producto vectorial: cruz "x"

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$$

$$|\vec{c}| = ab \sin \varphi = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \varphi$$

$$\vec{c} \perp \vec{a} \text{ y } \vec{c} \perp \vec{b}$$

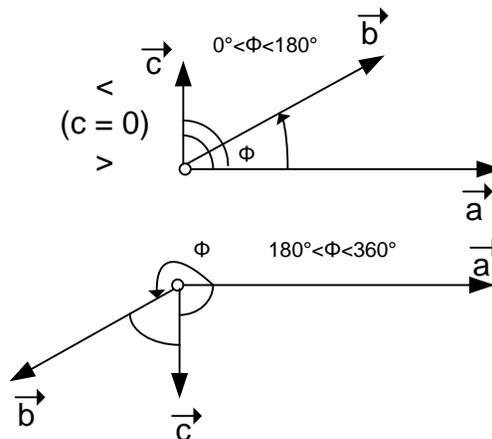
$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  forman una triada derecha

$$c_x = a_y b_z - a_z b_y$$

$$c_y = a_z b_x - a_x b_z$$

$$c_z = a_x b_y - a_y b_x$$

$$|\vec{c}| = \sqrt{c_x^2 + c_y^2 + c_z^2}$$



Valores importantes	$\varphi$	$0^\circ; 360^\circ$	$90^\circ$	$180^\circ$	$270^\circ$
	$ \vec{a}  \cdot  \vec{b}  \sin \varphi$	0	$+ \vec{a}   \vec{b} $	0	$- \vec{a}   \vec{b} $

$$A \cdot B = \|A\| \|B\| \cos \theta \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

donde  $\theta$  es el ángulo formado por A y B

$$A \cdot B = A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3$$

donde:

**Formulario para el sustentante del**

Examen General para el Egreso de la Licenciatura en Ingeniería Electrónica (EGEL-IELECTRO)

**Dirección del Programa de Evaluación de Egreso (EGEL) Diseño, Ingenierías y Arquitectura**

$$A = A_1 \hat{i} + A_2 \hat{j} + A_3 \hat{k}$$

$$B = B_1 \hat{i} + B_2 \hat{j} + B_3 \hat{k}$$

Son resultados fundamentales:

$$\text{Producto cruz: } A \times B = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} = (A_2 B_3 - A_3 B_2) \hat{i} + (A_3 B_1 - A_1 B_3) \hat{j} + (A_1 B_2 - A_2 B_1) \hat{k}$$

Magnitud del producto cruz  $\|A \times B\| = \|A\| \|B\| \sin \theta$ El operador *nabla* se define así:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k}$$

En las fórmulas siguientes se asume que  $U = U(x, y, z)$  y  $A = A(x, y, z)$  tienen derivadas parciales.**Gradiente de U**

$$\text{grad}(U) = \nabla U = \left( \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} \right) U = \left( \frac{\partial U}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \hat{k} \right)$$

**Divergencia de A**

$$\text{div}(A) = \nabla \cdot A = \left( \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} \right) \cdot (A_1 \hat{i} + A_2 \hat{j} + A_3 \hat{k}) = \frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z}$$

**Rotacional de A**

$$\begin{aligned} \text{rot}A &= \nabla \times A = \left( \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} \right) \times (A_1 \hat{i} + A_2 \hat{j} + A_3 \hat{k}) \\ &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix} \\ &= \left( \frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} \right) \hat{i} + \left( \frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x} \right) \hat{j} + \left( \frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} \right) \hat{k} \end{aligned}$$

**Laplaciano de U**

$$\nabla^2 U = \nabla \cdot (\nabla U) = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

## Fracciones racionales

### Descomposición

$$y(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_mx^m}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n}$$

donde n y m son enteros y  $n > m$ .

Los coeficientes  $a_i, b_i$  pueden ser reales o complejos. Si  $n_i$  son las raíces de  $Q(x)$ , se obtiene la forma factorizada:

$$y(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{\alpha(x-n_1)^{k_1}(x-n_2)^{k_2}\dots(x-n_q)^{k_q}}$$

En esta expresión pueden representarse raíces de multiplicidad  $k_1, k_2, \dots, k_q$  de  $Q(x)$ , que pueden ser reales o complejas;  $\alpha$  es un factor constante.

### Descomposición de fracciones parciales

Para lograr un manejo más sencillo de  $y(x)$  es conveniente descomponerla en fracciones parciales:

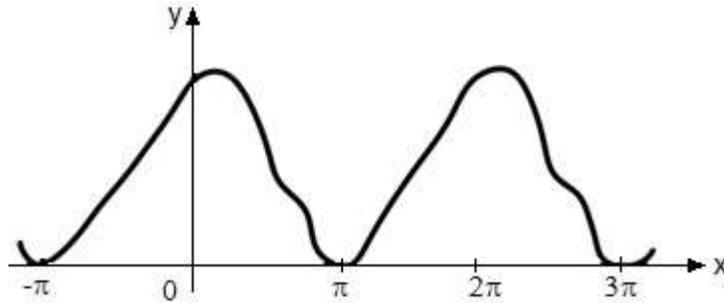
$$y(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_{11}}{x-n_1} + \frac{A_{12}}{(x-n_1)^2} + \dots + \frac{A_{1k_1}}{(x-n_1)^{k_1}} +$$

$$\frac{A_{21}}{x-n_2} + \frac{A_{22}}{(x-n_2)^2} + \dots + \frac{A_{2k_2}}{(x-n_2)^{k_2}} + \dots +$$

$$\frac{A_{q1}}{x-n_q} + \frac{A_{q2}}{(x-n_q)^2} + \dots + \frac{A_{qk_q}}{(x-n_q)^{k_q}}$$

Si los coeficientes de  $Q(x)$  son reales, aparecen raíces complejas por parejas (raíces complejas conjugadas). Para efectuar la descomposición se agrupan estas parejas en fracciones parciales reales. Si en  $b'1, n_2 = n_1$  (compleja conjugada de  $n_1$ ) y debido a su aparición por parejas  $k_1 = k_2 = k_3$ , entonces las fracciones parciales de  $b'2$ , con las constantes  $A_{11}, \dots, A_{2k_2}$  pueden agruparse en las fracciones parciales:

$$\frac{B_{11}x + C_{11}}{x^2 + ax + b} + \frac{B_{12}x + C_{12}}{(x^2 + ax + b)^2} + \dots + \frac{B_{1k}x + C_{1k}}{(x^2 + ax + b)^k}$$

**Series de Fourier**

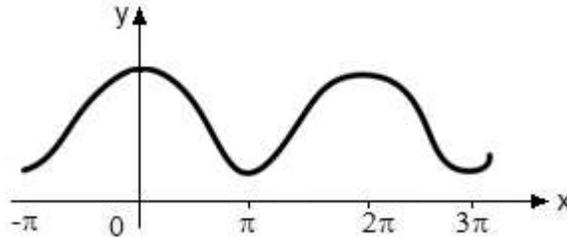
Toda función periódica  $f(x)$ , que puede descomponerse en el intervalo de periodicidad  $-\pi \leq x \leq \pi$  en un número finito de intervalos continuos, podrá descomponerse en ese intervalo en una serie convergente de la forma:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)]$$

Los coeficientes de cada término se forman como sigue:

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx \qquad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen}(kx) dx$$

Funciones pares:  $f(x) = f(-x)$

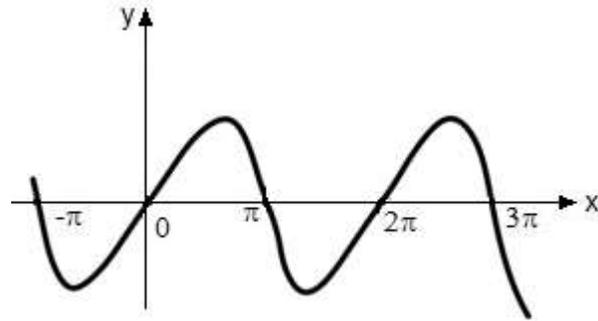


$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(kx) dx \quad \text{para } k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$b_k = 0$$

**Formulario para el sustentante del**

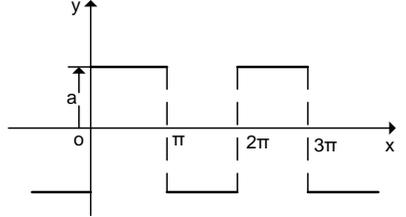
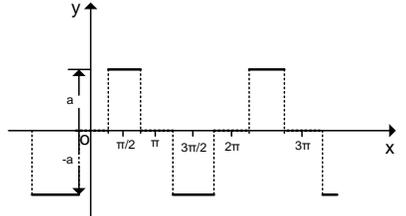
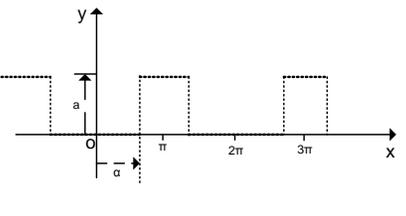
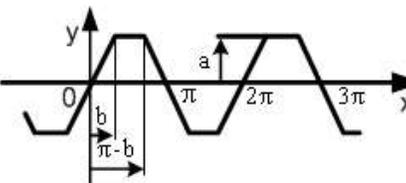
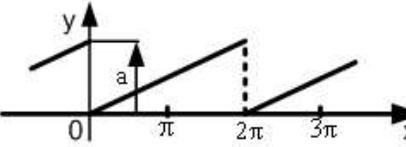
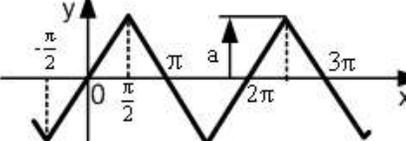
Examen General para el Egreso de la Licenciatura en Ingeniería Electrónica (EGEL-IELECTRO)

**Dirección del Programa de Evaluación de Egreso (EGEL) Diseño, Ingenierías y Arquitectura**Funciones impares:  $f(x) = -f(-x)$ 

$$a_k = 0$$

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(kx) dx \quad \text{para } k = 0, 1, 2, \dots,$$

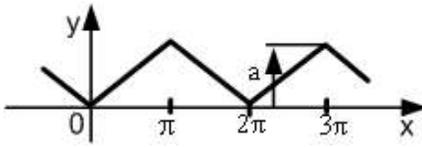
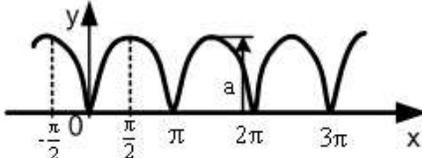
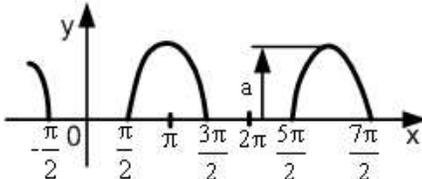
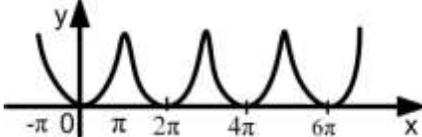
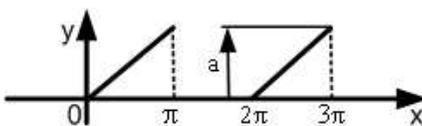
**Tablas de desarrollo en series de Fourier**

$y = a \text{ para } 0 < x < \pi$ $y = -a \text{ para } \pi < x < 2\pi$ $y = \frac{4a}{\pi} \left[ \text{sen } x + \frac{\text{sen}(3x)}{3} + \frac{\text{sen}(5x)}{5} + \dots \right]$	
$y = a \text{ para } \alpha < x < \pi - \alpha$ $y = -a \text{ para } \pi + \alpha < x < 2\pi - \alpha$ $y = \frac{4a}{\pi} \left[ \cos \alpha \text{sen } x + \frac{1}{3} \cos(3\alpha) \text{sen}(3x) + \frac{1}{5} \cos(5\alpha) \text{sen}(5x) + \dots \right]$	
$y = a \text{ para } \alpha < x < 2\pi - \alpha$ $y = f(2\pi + x)$ $y = \frac{2a}{\pi} \left[ \frac{\pi - \alpha}{2} - \frac{\text{sen}(\pi - \alpha)}{1} \cos x + \frac{\text{sen}2(\pi - \alpha)}{3} \cos 2x - \frac{\text{sen}3(\pi - \alpha)}{3} \cos 3x + \dots \right]$	
$y = \frac{ax}{b} \text{ para } 0 \leq x \leq b$ $y = a \text{ para } b \leq x \leq \pi - b$ $y = \frac{a(\pi - x)}{b} \text{ para } \pi - b \leq x \leq \pi$ $y = \frac{4a}{\pi b} \left[ \frac{1}{1^2} \text{sen } b \text{sen } x + \frac{1}{3^2} \text{sen}(3b) \text{sen}(3x) + \frac{1}{5^2} \text{sen}(5b) \text{sen}(5x) + \dots \right]$	
$y = \frac{ax}{2\pi} \text{ para } 0 < x < 2\pi$ $y = f(2\pi + x)$ $y = \frac{a}{2} - \frac{a}{\pi} \left[ \frac{\text{sen } x}{1} + \frac{\text{sen}2x}{2} + \frac{\text{sen}3x}{3} + \dots \right]$	
$y = \frac{2ax}{\pi} \text{ para } 0 \leq x \leq \pi/2$ $y = \frac{2a(\pi - x)}{\pi} \text{ para } \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$	

**Formulario para el sustentante del**

Examen General para el Egreso de la Licenciatura en Ingeniería Electrónica (EGEL-IELECTRO)

**Dirección del Programa de Evaluación de Egreso (EGEL) Diseño, Ingenierías y Arquitectura**

$y = -f(\pi + x)$ $y = \frac{8}{\pi^2} a \left[ \text{sen } x - \frac{\text{sen } 3x}{3^2} + \frac{\text{sen } 5x}{5^2} - \dots \right]$	
$y = \frac{ax}{\pi} \text{ para } 0 \leq x \leq \pi$ $y = \frac{a(2\pi - x)}{\pi} \text{ para } \pi < x < 2\pi$ $y = f(2\pi + x)$ $y = \frac{a}{2} - \frac{4a}{\pi^2} \left[ \frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots \right]$	
$y = a \text{sen } x \text{ para } 0 \leq x \leq \pi$ $y = -a \text{sen } x \text{ para } \pi \leq x \leq 2\pi$ $y = f(\pi + x)$ $y = \frac{2a}{\pi} - \frac{4a}{\pi} \left[ \frac{\cos 2x}{1 \cdot 3} + \frac{\cos 4x}{3 \cdot 5} + \frac{\cos 6x}{5 \cdot 7} + \dots \right]$	
$y = 0 \text{ para } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ $y = a \text{sen} \left( x - \frac{\pi}{2} \right) \text{ para } \frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$ $y = f(2\pi + x)$ $y = \frac{2a}{\pi} \left[ \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} \cos x + \frac{\cos 2x}{2^2 - 1} - \frac{\cos 4x}{4^2 - 17} + \frac{\cos 6x}{6^2 - 1} - \dots \right]$	
$y = x^2 \text{ para } \pi \leq x \leq -\pi$ $y = f(-x) = f(2\pi + x)$ $y = \frac{\pi^2}{3} - 4 \left[ \frac{\cos x}{1^2} - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \dots \right]$	
$y = \frac{ax}{\pi} \text{ para } 0 < x < \pi$ $y = f(2\pi + x)$ $y = \frac{a}{4} - \frac{2a}{\pi^2} \left[ \frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \dots \right]$ $+ \frac{a}{\pi} \left[ \frac{\text{sen } x}{1} - \frac{\text{sen } 2x}{2} + \frac{\text{sen } 3x}{3} - \dots \right]$	

### Transformada de Fourier

Definiciones:

$$F\{s(t)\} = S(w) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt; \quad j = \sqrt{-1}$$

$$F^{-1}\{S(w)\} = s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(w) e^{j\omega t} dw; \quad j = \sqrt{-1}$$

### Reglas de operación

Desplazamiento en tiempo  $F\{s(t - \tau)\} = S(w) e^{-j\omega\tau}$

Convolución

$$s_1(t) * s_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(\tau) \cdot s_2(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} s_2(\tau) * s_1(t - \tau) d\tau$$

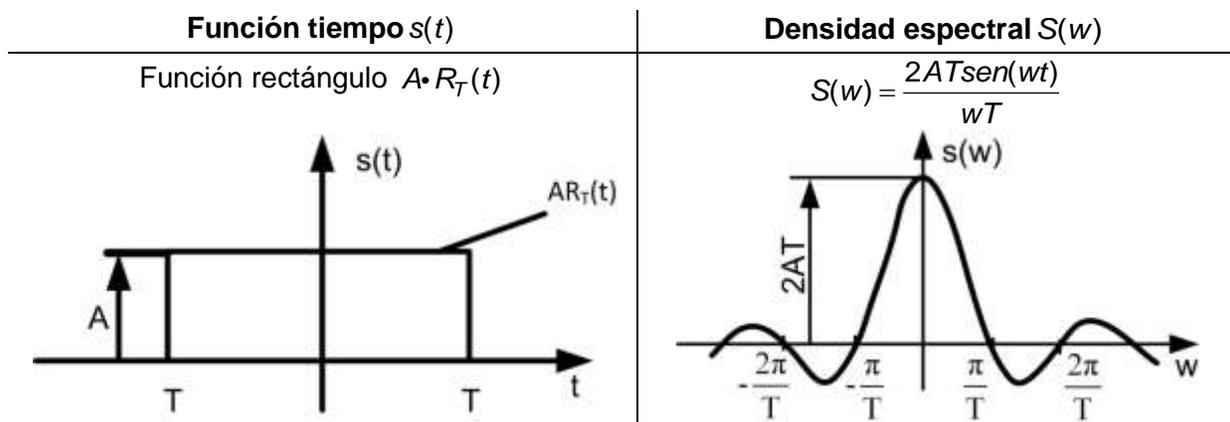
$$F\{s_1(t) \cdot s_2(t)\} = S_1(w) * S_2(w)$$

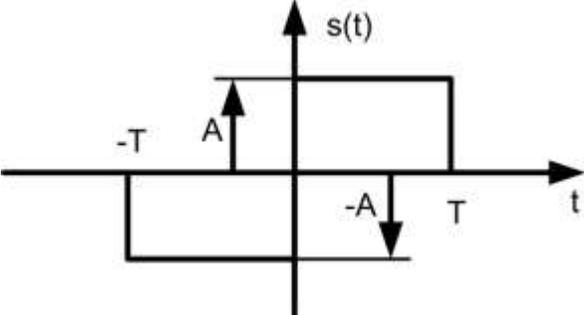
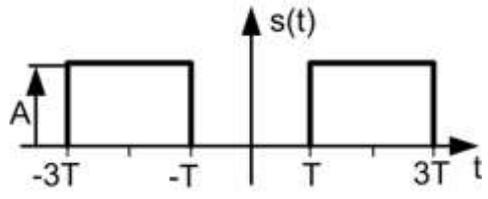
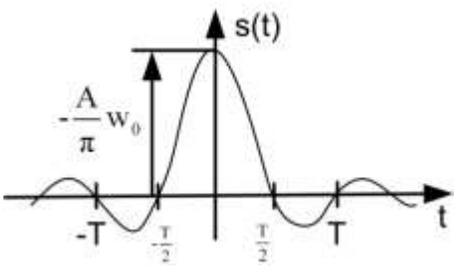
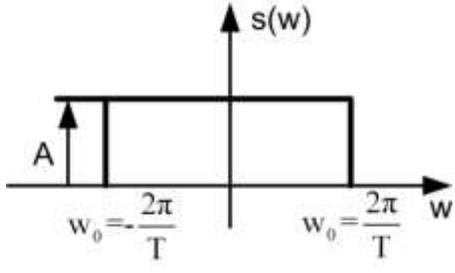
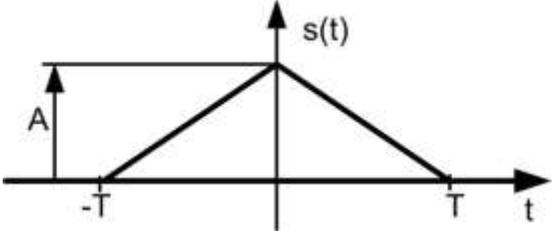
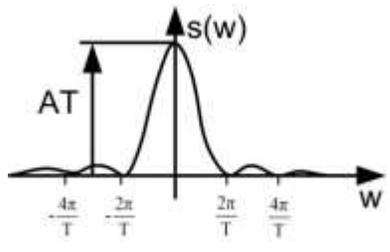
$$F\{s(t)\} = S(w)$$

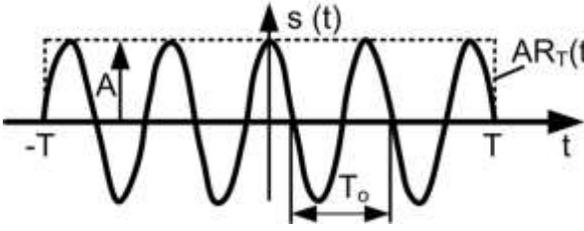
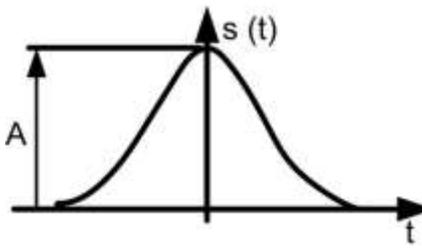
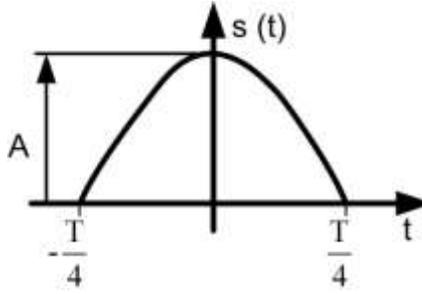
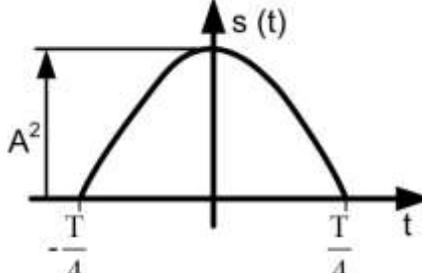
$$F\{s(at)\} = \frac{1}{|a|} S\left(\frac{w}{a}\right), \quad a > 0$$

$$F\{s_1(t) + s_2(t)\} = S_1(w) + S_2(w)$$

Enseguida se indican las densidades espectrales calculadas para algunas importantes funciones del tiempo.



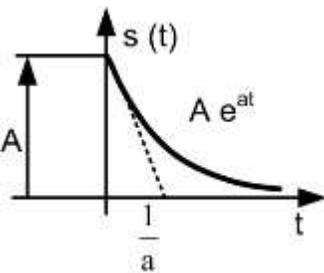
Función tiempo $s(t)$	Densidad espectral $S(w)$
<p>Función rectángulo con cambio de signo</p> 	$S(w) = -j2AT \frac{\text{sen}^2 \frac{wt}{2}}{\frac{wt}{2}}$
	$S(w) = 4AT \cos(2wt) \frac{\text{sen}wt}{wt}$
<p><math>s(t) = \frac{A}{\pi} w_0 \frac{\text{sen}(w_0 t)}{w_0 t} \quad w_0 = \frac{2\pi}{T}</math></p> 	<p><math>S(w) = AR_{w_0}(w)</math> (Función rectángulo)</p> 
<p>Función triángulo <math>AD_T(t)</math></p> 	$S(w) = \left( \frac{\text{sen}\left(\frac{Tw}{2}\right)}{\frac{Tw}{2}} \right)^2 AT$ 

Función tiempo $s(t)$	Densidad espectral $S(w)$
<p>Rectángulo modulado</p> $A \cdot R_T(t) \cos(w_0 t) \quad w_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{aT}$ 	$S(w) = A \frac{\text{sen}T(w + w_0)}{w + w_0} + A \frac{\text{sen}T(w - w_0)}{w - w_0}$
<p>Impulso de Gauss <math>Ae^{-a^2t^2}</math></p> 	$S(w) = \frac{A}{a} \sqrt{\pi} \cdot e^{-\frac{w^2}{4a^2}}$
<p>Impulso coseno <math>A \cos(w_0 t) \quad w_0 = \frac{2\pi}{T}</math></p> 	$S(w) = \frac{AT}{\pi} \frac{\cos\left(\frac{T}{4}w\right)}{1 - \left(\frac{T}{2\pi}w\right)^2}$
<p>Impulso <math>\cos^2 A^2 \cos^2(w_0 t) \quad w_0 = \frac{2\pi}{T}</math></p> 	$S(w) = \frac{AT}{4} \frac{\text{sen}\left(\frac{T}{4}w\right)}{\left(\frac{T}{4}w\right)} \frac{1}{1 - \left(\frac{T}{4\pi}w\right)^2}$

**Formulario para el sustentante del**

Examen General para el Egreso de la Licenciatura en Ingeniería Electrónica (EGEL-IELECTRO)

**Dirección del Programa de Evaluación de Egreso (EGEL) Diseño, Ingenierías y Arquitectura**

Función tiempo $s(t)$	Densidad espectral $S(w)$
<p>Impulso exponencial</p>  <p>The graph shows a plot of the exponential impulse function <math>s(t)</math> against time <math>t</math>. The vertical axis is labeled <math>s(t)</math> and the horizontal axis is labeled <math>t</math>. The function is zero for <math>t &lt; 0</math>. At <math>t = 0</math>, the function starts at a value <math>A</math>. It then decays exponentially as <math>t</math> increases. A dashed line is drawn from the point <math>(0, A)</math> to the horizontal axis at <math>t = \frac{1}{a}</math>, indicating the time constant of the decay.</p>	$S(w) = \frac{A}{jw + a}$

**Transformada de Laplace**

Definiciones:

$$L\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt;$$

$$L^{-1}\{F(s)\} = f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{-\infty}^{+\infty} F(s)e^{st} ds; \quad j = \sqrt{-1}$$

**Reglas de operación**

Linealidad	$L\{f_1(t) + f_2(t)\} = F_1(s) + F_2(s)$ $L\{c \cdot f_1(t)\} = cF_1(s)$
Teorema de traslación	$L\{f(t-a)\} = e^{-as}F(s)$
Teorema de convolución	$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau) \cdot f_2(t-\tau) d\tau = \int_0^t f_2(\tau) \cdot f_1(t-\tau) d\tau$ $L\{f_1(t) * f_2(t)\} = F_1(s) \cdot F_2(s)$
Cambio de variable	$L\left\{\frac{1}{a} f\left(\frac{t}{a}\right)\right\} = F(a \cdot s)$
Diferenciación	$L\{f'(t)\} = sF(s) - f(0)$ $L\{f''(t)\} = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$ $L\{f^{(n)}(t)\} = s^nF(s) - \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(0) s^{n-k-1}$
Integración	$L\left\{\int f(t) \cdot dt\right\} = \frac{1}{s}F(s)$

**Tabla de transformadas de Laplace:**

$f(t)$	$F(s) = L \{f(t)\}$
1. 1	$\frac{1}{s}$
2. $t^n, n=1,2,3,\dots$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
3. $t^{-1/2}$	$\sqrt{\frac{\pi}{s}}$
4. $e^{\pm at}$	$\frac{1}{s \mp a}$
5. $\text{sen} kt$	$\frac{k}{s^2 + k^2}$
6. $\cos kt$	$\frac{s}{s^2 + k^2}$
7. $\text{senh} kt$	$\frac{k}{s^2 - k^2}$
8. $\cosh kt$	$\frac{s}{s^2 - k^2}$
9. $e^{at} f(t)$	$F(s - a)$
10. $\mu(t - a), a \geq 0$	$\frac{e^{-as}}{s}$
11. $f(t - a)U(t - a), a \geq 0$	$e^{-as}F(s)$
12. $t^n f(t), n=1, 2, 3,\dots$	$(-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s)$
13. $f^n(t), n=1, 2, 3,\dots$	$s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$
14. $\int_0^t f(\tau)g(t - \tau) d\tau$	$F(s)G(s)$
15. $\delta(t - t_0), t_0 \geq 0$	$e^{-st_0}$
16. $t^n e^{at}, n=1, 2, 3,\dots$	$\frac{n!}{(s - a)^{n+1}}$

17. $e^{at} \operatorname{sen} kt$	$\frac{k}{(s-a)^2 + k^2}$
18. $e^{at} \cos kt$	$\frac{s-a}{(s-a)^2 + k^2}$
19. $t \operatorname{sen} kt$	$\frac{2ks}{(s^2 + k^2)^2}$
20. $t \cos kt$	$\frac{s^2 - k^2}{(s^2 + k^2)^2}$
21. $\operatorname{sen} kt - kt \cos kt$	$\frac{2k^3}{(s^2 + k^2)^2}$
22. $\operatorname{sen} kt + kt \cos kt$	$\frac{2ks^2}{(s^2 + k^2)^2}$
23. $\operatorname{sen} hkt - \operatorname{sen} kt$	$\frac{2k^3}{s^4 - k^4}$
24. $\cosh kt - \cos kt$	$\frac{2k^2s}{s^4 - k^4}$
25. $1 - \cos kt$	$\frac{k^2}{s(s^2 + k^2)}$
26. $kt - \operatorname{sen} kt$	$\frac{k^3}{s(s^2 + k^2)}$
27. $\frac{a \operatorname{sen} bt - b \operatorname{sen} at}{ab(a^2 - b^2)}$	$\frac{1}{(s^2 + a^2)(s^2 + b^2)}$
28. $\frac{\cos bt - \cos at}{a^2 - b^2}$	$\frac{s}{(s^2 + a^2)(s^2 + b^2)}$
29. $\delta(t)$	1
30. $\frac{t^{n-1}}{(n-1)}$	$\frac{1}{s^n}$
31. $\exp(at) - 1$	$\frac{a}{s(s-a)}$
32. $\frac{1}{T} \exp(-t/T)$	$\frac{1}{1+Ts}$

**Formulario para el sustentante del**

Examen General para el Egreso de la Licenciatura en Ingeniería Electrónica (EGEL-IELECTRO)

**Dirección del Programa de Evaluación de Egreso (EGEL) Diseño, Ingenierías y Arquitectura**

33.	$\frac{1}{2k} \sin(kt)$	$\frac{s}{(s^2 + k^2)^2}$
34.	$\frac{1}{2k} \sin(kt) + \frac{t}{2} \cos(kt)$	$\frac{s^2}{(s^2 + k^2)^2}$
35.	$\cos(kt) - \frac{k}{2} t \sin(kt)$	$\frac{s^3}{(s^2 + k^2)^2}$
36.	$\frac{e^{bt} - e^{at}}{b - a}, b \neq a$	$\frac{1}{(s - a)(s - b)}$
37.	$\frac{1}{k} e^{-at} \cdot \sin(kt)$	$\frac{1}{(s + a)^2 + k^2}$
38.	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$	$\frac{1}{\sqrt{s}}$
39.	$2\sqrt{\frac{t}{\pi}}$	$\frac{1}{s\sqrt{s}}$
40.	$-\frac{1}{2\sqrt{\pi} \cdot t^{3/2}}$	$\sqrt{s}$
41.	$\frac{3}{4\sqrt{\pi} \cdot t^{5/2}}$	$s\sqrt{s}$
42.	$\frac{1}{t}(e^{-at} - e^{-bt})$	$\ln \frac{s+b}{s+a}$
43.	$\frac{1}{t} \sin(a \cdot t)$	$\tan^{-1}(a/s)$
44.	$\frac{a}{2t\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{a^2}{4t}}$	$e^{-a\sqrt{s}}; a > 0$
45.	$\operatorname{erfc} \frac{a}{2\sqrt{t}}$	$\frac{1}{s} e^{-a\sqrt{s}}; a \geq 0$
46.	Función de Bessel $J_0(kt)$	$\frac{1}{\sqrt{s^2 + k^2}}$

**Transformada inversa**

Fracciones parciales

Sea:

$$G(s) = \frac{Q(s)}{P(s)}$$

donde:

$$P(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0$$

Si  $G(s)$  tiene polos simples

$$G(s) = \frac{K_1}{s + s_1} + \frac{K_2}{s + s_2} + \dots + \frac{K_n}{s + s_n}$$

$$K_i = \left[ (s + s_i) \frac{Q(s)}{P(s)} \right]_{s=-s_i}$$

Si  $G(s)$  tiene polos de orden múltiple

$$G(s) = \frac{Q(s)}{P(s)} = \frac{Q(s)}{(s + s_1)(s + s_2) \dots (s + s_{n-r})(s + s_i)^r}$$

Siendo:  $i \neq 1, 2, \dots, n-r$

$$G(s) = \underbrace{\frac{K_1}{s + s_1} + \frac{K_2}{s + s_2} + \dots + \frac{K_{(n-r)}}{s + s_{(n-r)}}}_{n - r \text{ términos de polos simples}} + \underbrace{\frac{A_1}{s + s_i} + \frac{A_2}{(s + s_i)^2} + \dots + \frac{A_r}{(s + s_i)^r}}_{r \text{ términos de polos repetidos}}$$

$$A_r = \left[ (s + s_i)^r G(s) \right]_{s=-s_i}$$

$$A_{r-1} = \frac{d}{ds} \left[ (s + s_i)^r G(s) \right]_{s=-s_i}$$

$$A_{r-2} = \frac{1}{2!} \frac{d^2}{ds^2} \left[ (s + s_i)^r G(s) \right]_{s=-s_i}$$

$$A_1 = \frac{1}{(r-1)!} \frac{d^{r-1}}{ds^{r-1}} \left[ (s + s_i)^r G(s) \right]_{s=-s_i}$$

**Formulario para el sustentante del**

Examen General para el Egreso de la Licenciatura en Ingeniería Electrónica (EGEL-IELECTRO)

**Dirección del Programa de Evaluación de Egreso (EGEL) Diseño, Ingenierías y Arquitectura**

**Probabilidad y estadística**

**Parámetro**

**Estimador puntual**

**Intervalo de confianza (1-α) 100%**

Media μ

(varianza σ<sup>2</sup> conocida)

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

$$\bar{X} - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Varianza σ<sup>2</sup> (de una distribución normal)

$$S_{n-1}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

$$\frac{(n-1)S_{n-1}^2}{\chi_{\frac{\alpha}{2}, n-1}^2} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S_{n-1}^2}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}^2}$$

**Desviación estándar de distribución de medias**

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

**Valor promedio (media)**

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$$

**Media de medias**

$$\bar{\bar{X}} = \frac{\sum_{j=1}^m \bar{X}_j}{m}$$

**Intervalo o rango de valores**

$$R = V_{\max} - V_{\min}$$

**Media de rangos**

$$\bar{R} = \frac{\sum_{j=1}^m R_j}{m}$$

**Hipótesis nula**

$$H_0 : \mu = \mu_0, \quad \sigma^2 \text{ conocida}$$

$$H_0 : \mu = \mu_0, \quad \sigma^2 \text{ desconocida}$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}$$

**Estadístico de prueba**

$$Z_0 = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

$$t_0 = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{S_{n-1}}{\sqrt{n}}}$$

$$\chi_0^2 = \frac{(n-1)S_{n-1}^2}{\sigma_0^2}$$

**Regresión lineal**

$$y = \beta_0 + \beta_1 x$$

$$\beta_0 = y - \beta_1 x$$

$$\beta_1 = \frac{\sum_{i=1}^n y_i x_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^n y_i\right)\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)}{n}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2}{n}}$$

**Coefficiente de correlación de la muestra**

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n y_i (x_i - \bar{x})}{\left[ \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 \right]^{1/2}}$$

**Permutaciones**

$$P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$$

**Combinaciones**

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

### Permutaciones con objetos similares

$$P_{n_1, n_2, \dots, n_k}^n = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$$

### Probabilidad condicional

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

### Teorema de Bayes

$$P(B_k|A) = \frac{P(B_k)P(A|B_k)}{\sum_{i=1}^N P(B_i)P(A|B_i)}$$

**Valor promedio**

$$a_{prom} = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

donde:

$a_{prom}$  = valor promedio

$a_n$  = valor de cada lectura

$n$  = número de lecturas

**Desviación estándar y varianza**

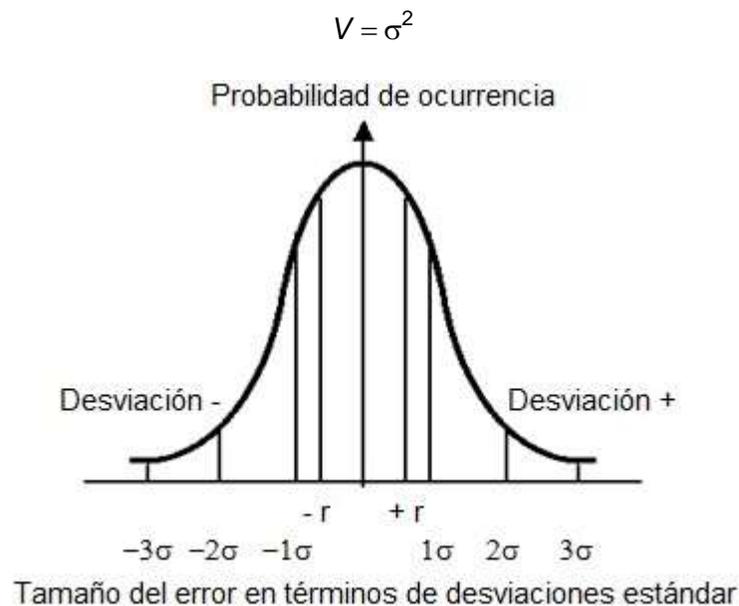
$$\sigma = \sqrt{\frac{d_1^2 + d_2^2 + \dots + d_n^2}{n-1}}$$

donde:

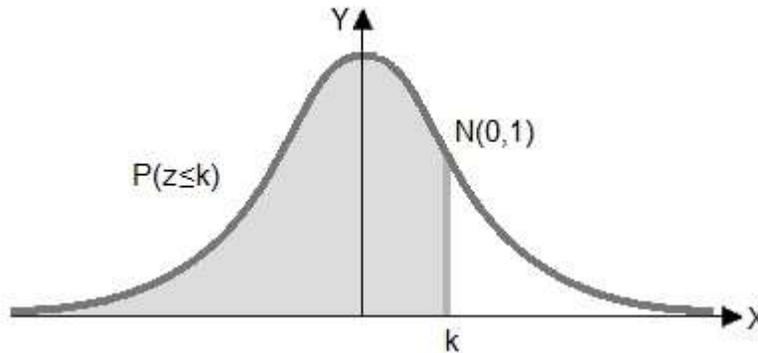
$\sigma$  = desviación estándar

$d_i$  = desviación de la lectura  $i$ -ésima con respecto al valor promedio

La varianza  $V$  es el valor de la desviación estándar  $\sigma$  elevado al cuadrado

**Distribución gaussiana**

**Tabla de distribución de probabilidad normal estándar**



z	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.516	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.648	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.67	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.695	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.719	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.758	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.791	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.834	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.877	0.879	0.881	0.883
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.898	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.937	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.975	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.983	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.985	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.989
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.992	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.994	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.996	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.997	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.998	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.999	0.999
3.1	0.999	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

## Modelos probabilísticos comunes

Nombre	Distribución	Rango	Media	Varianza	Función generatriz de momentos
Binomial	$\binom{n}{x} p^x q^{n-x}$	$x=0,1,\dots,n$	$np$	$npq$	$(q + pe^\theta)^n$
Geométrica	$pq^{x-1}$	$x=1,2,\dots$	$\frac{1}{p}$	$\frac{q}{p^2}$	$\frac{pe^\theta}{1 - qe^\theta}$
De Pascal (Binomial negativa)	$\binom{x-1}{r-1} p^r q^{x-r}$	$x=r, r+1, \dots$	$\frac{r}{p}$	$\frac{rq}{p^2}$	$\left(\frac{pe^\theta}{1 - qe^\theta}\right)^r$
De Poisson	$\frac{(\lambda t)^x e^{-\lambda t}}{x!}$	$x=0,1,2,\dots$	$\lambda t$	$\lambda t$	$e^{\lambda t(e^\theta - 1)}$
Uniforme	$\frac{1}{b-a}$	$a \leq x \leq b$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\frac{e^{b\theta} - e^{a\theta}}{(b-a)\theta}$
Exponencial	$\lambda e^{-\lambda x}$	$x \geq 0$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	$\frac{\lambda}{\lambda - \theta}$
Normal	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$	$-\infty < x < \infty$	$\mu$	$\sigma^2$	$e^{\mu\theta + \frac{1}{2}\sigma^2\theta^2}$
Ji-cuadrada		$x > 0$	$v$	$2v$	$(1 - 2\theta)^{-\frac{v}{2}}$
t de Student		$-\infty < x < \infty$	$0$	$\frac{v}{v-2}, v > 2$	
F (de Fisher)		$0 < x < \infty$	$\frac{v_2}{v_2 - 2}, v_2 > 2$	$\frac{2v_2^2(v_1 + v_2 - 2)}{v_1(v_2 - 2)^2(v_2 - 4)}, v_2 > 4$	
Erlang	$\frac{\lambda(\lambda t)^{r-1} e^{-\lambda t}}{(r-1)!}$	$t > 0$	$\frac{r}{\lambda}$	$\frac{r}{\lambda^2}$	

**Física**

**Mecánica**

**Centroides**

Arco de circunferencia

$$y = \frac{r(\operatorname{sen} \alpha)(180^\circ)}{\pi(\alpha^\circ)} = \frac{rs}{b}$$

Triángulo

$$y = \frac{1}{3}h$$

Sector de círculo

$$y = \frac{2r(\operatorname{sen} \alpha)(180^\circ)}{3\pi(\alpha^\circ)} = \frac{2rs}{3b}$$

Trapezio

$$y = \frac{h}{3} \frac{a+2b}{a+b}$$

Segmento de corona circular

$$y = \frac{2}{3} \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2} \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\alpha}$$

$$y = \frac{2}{3} \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2} \frac{s}{b}$$

Segmento de círculo

$$y = \frac{s^3}{12A}$$

**Estática****Fuerza aplicada paralelamente al plano de deslizamiento****Fricción estática**

$$F_{f1} = -F_1 = G \tan \phi_1$$

$$N = -G$$

$$C < \phi_1 (\text{variable}) < \phi_0$$

## Valor límite

$$F_{f0} = -F_0 = G \tan \phi_0$$

$$N = -G$$

$$\mu_0 = \tan \phi_0 > \mu$$

$$\phi_0 = \text{constante} > \phi$$

**Fricción dinámica**

$$F_f = -F = G \tan \phi$$

$$N = -G$$

$$\mu = \tan \phi > \mu_0$$

$$\phi = \text{constante} > \phi_0$$

**Fuerza aplicada oblicuamente respecto al plano de deslizamiento**

$$F = G \frac{\mu_0}{\text{sen} \alpha - \mu_0 \cos \alpha} = G \frac{\text{sen} \phi_0}{\text{sen}(\alpha - \phi_0)}$$

**Rozamiento en un plano inclinado**

$$\tan \alpha = \tan \phi = \mu$$

**Fricción de chumaceras**

## De carga radial

$$M_1 = \mu_r r F$$

## De carga axial

$$M_f = \mu_\alpha \frac{r_1 + r_2}{2} F$$

**Formulario para el sustentante del**

Examen General para el Egreso de la Licenciatura en Ingeniería Electrónica (EGEL-IELECTRO)

**Dirección del Programa de Evaluación de Egreso (EGEL) Diseño, Ingenierías y Arquitectura****Fricción rodante**

Rodamiento de un cilindro macizo

$$F = \frac{f}{r} N \cong \frac{f}{r} G$$

Condición de rodamiento

$$F_f < \mu_0 N$$

Movimiento de una placa sobre rodillos

$$F = \frac{(f_1 + f_2)G_1 + nf_2G_2}{2r}$$

Si  $f_1 = f_2 = f$  y  $nG_2 < G_1$ 

$$F = \frac{f}{r} G_1$$

**Fricción en cables**

Fuerza de tracción para subir la carga G

$$F_1 = e^{\mu_0} G, \quad F_f = (e^{\mu_0} - 1)G$$

Fuerza de tracción para bajar la carga G

$$F_2 = e^{-\mu_0} G, \quad F_f = (1 - e^{-\mu_0})G$$

Transmisión de banda o correa

$$F_p = \frac{M_i}{r} \quad \text{y} \quad F_p = F$$

En movimiento

$$F_0 = \frac{F_p}{e^{\mu_0} - 1}$$

$$F_1 = F_p \frac{e^{\mu_0}}{e^{\mu_0} - 1}$$

$$F_a = F_p \frac{e^{\mu_0} + 1}{e^{\mu_0} - 1}$$

En reposo

$$F_0 = F_1 = \frac{F_a (e^{\mu_0} + 1)}{2(e^{\mu_0} - 1)}$$

$$F_a = F_p \frac{e^{\mu_0} + 1}{e^{\mu_0} - 1}$$

**Cinemática**

$$F = xi + yj + zk$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} \vec{u}_t + \frac{v^2}{\rho} \vec{u}_n$$

$$\vec{v} = v \vec{u}_t$$

$$\vec{v} = \dot{r} u_r + r \dot{\theta} u_\theta$$

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) u_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) u_\theta$$

**Movimiento en una dimensión**

$$x = vt$$

$$x = x_0 + vt$$

$$\bar{v} = \frac{1}{2} (v + v_0)$$

$$v = v_0 + at$$

$$x = x_0 + \frac{1}{2} (v_0 + v)t$$

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2$$

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$$

## Dinámica

$$\vec{F} = m\vec{a} = \left(\frac{W}{g}\right)\vec{a} \quad W: \text{ peso}$$

$$F = G \frac{mM}{r^2}$$

$$\Sigma F = m \frac{dV}{dt}$$

$$\frac{X_B}{A} = X_B - X_A$$

$$\frac{V_B}{A} = V_B - V_A$$

$$\frac{a_B}{A} = a_B - a_A$$

## Características cinemáticas de puntos y segmentos rectilíneos

### Conceptos lineales y angulares<sup>1</sup>

Se tiene que son conceptos lineales:

r = posición, v= velocidad, a = aceleración, t = tiempo

Se tiene que son conceptos angulares:

$\theta$  = posición,  $\omega$  = velocidad,  $\alpha$  = aceleración, t = tiempo

Expresión que relaciona ambos conceptos:

$$v = \omega r$$

---

<sup>1</sup> Por simplicidad se omite la dependencia del tiempo en las funciones. Por ejemplo:  $v(t) \equiv V$ .

**Conceptos correspondientes a puntos y partículas en movimiento**

Concepto	Símbolo(s) más común(es)	Relación con otra(s) función(es)
Vector de posición (lineal)	$r$	
Velocidad (lineal)	$\dot{v}, r$	$v = \frac{dr}{dt}$
Aceleración (lineal)	$\ddot{a}, r$	$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2r}{dt^2}$

**Conceptos correspondientes a segmentos rectilíneos que modifican su dirección durante el movimiento, y de cuerpos rígidos que contengan ese tipo de segmentos**

Concepto	Símbolo(s) más común(es)	Relación con otra(s) función(es)
Vector de posición (angular)	$\theta$	
Velocidad (angular)	$\dot{w}, \theta$	$w = \frac{d\theta}{dt}$
Aceleración (angular)	$\ddot{\alpha}, \theta$	$\alpha = \frac{dw}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$

Componentes cartesianas de los vectores de posición, velocidad y aceleración lineales para movimientos en el espacio, en un plano y rectilíneos.

$$r = r(t) = xi + yj + zk$$

$$v = \dot{r} = \dot{x}i + \dot{y}j + \dot{z}k$$

$$a = \ddot{r} = \ddot{x}i + \ddot{y}j + \ddot{z}k$$

Entonces, si P se mueve en el plano xy tenemos:

$$r = r(t) = xi + yj$$

$$v = \dot{r} = \dot{x}i + \dot{y}j$$

$$a = \ddot{r} = \ddot{x}i + \ddot{y}j$$

Si P realiza un movimiento rectilíneo cualquiera en el eje x se tienen:

$$r = r(t) = xi$$

$$v = \dot{r} = \dot{x}i$$

$$a = \ddot{r} = \ddot{x}i$$

Relaciones entre conceptos lineales y angulares.

$$a = w(\dot{w}r) + \alpha r$$

### Cinemática del cuerpo rígido

$$v = \dot{R} + \omega \times \rho$$

$$a = \ddot{R} + \dot{\omega} \times \rho + \omega \times (\omega \times \rho)$$

Ecuaciones aplicables a cualquier tipo de movimiento del cuerpo rígido.

Centro y eje instantáneo de rotación.

$$v = \omega \Gamma$$

donde  $\Gamma$  es un vector perpendicular al eje instantáneo de rotación.

Primeros momentos de la masa de un sistema de partículas.

Con respecto a los planos  $xy$ ,  $xz$ ,  $yz$  tenemos:

$$M_{xy} = \sum_{i=1}^n m_i z_i, \quad M_{xz} = \sum_{i=1}^n m_i y_i, \quad M_{yz} = \sum_{i=1}^n m_i x_i$$

Primeros momentos de la masa de un cuerpo rígido.

$$M_{xy} = \int_V z dM, \quad M_{xz} = \int_V y dM, \quad M_{yz} = \int_V x dM$$

Ecuaciones escalares de centro de masa.

$$M_{x_c} = \sum_{i=1}^n m_i x_i, \quad M_{y_c} = \sum_{i=1}^n m_i y_i, \quad M_{z_c} = \sum_{i=1}^n m_i z_i$$

Para cuerpos rígidos tenemos:

$$M_{x_c} = \int_V x dM, \quad M_{y_c} = \int_V y dM, \quad M_{z_c} = \int_V z dM$$

Momentos de inercia de la masa de un cuerpo rígido.

$$I_{xx} = MM_{xz} + MM_{xy}$$

$$I_{yy} = MM_{yz} + MM_{xy}$$

$$I_{zz} = MM_{yz} + MM_{xz}$$

### Dinámica de la partícula

Ecuaciones de movimiento

$$F = ma$$

Trabajo y energía

$$dT = p \cdot dr$$

Energía cinética y su relación con el trabajo realizado por la fuerza resultante que actúa sobre una partícula

$$EC = \frac{1}{2} mv^2$$

Impulso y cantidad de movimiento lineales

$$\int_2^1 F dt = (mv)_2 - (mv)_1$$

Ecuación del impulso y la cantidad de movimiento lineales

Ecuación diferencial de movimiento para sistemas de partículas

$$F = \sum_{i=1}^n m_i a_i$$

$$F = Ma_c$$

$$\int_1^2 F dt = \left( \sum_{i=1}^n m_i v_i \right)_2 - \left( \sum_{i=1}^n m_i v_i \right)_1$$

**Formulario para el sustentante del**

Examen General para el Egreso de la Licenciatura en Ingeniería Electrónica (EGEL-IELECTRO)

**Dirección del Programa de Evaluación de Egreso (EGEL) Diseño, Ingenierías y Arquitectura**

Ecuación de impulso y cantidad de movimiento lineales para sistemas de partículas

Principio de la conservación de la cantidad de movimiento lineal para sistemas de partículas.

$$\left( \sum_{i=1}^n m_i v_i \right)_2 - \left( \sum_{i=1}^n m_i v_i \right)_1 = 0$$

Ecuación para obtener la cantidad de movimiento angular de un cuerpo rígido.

$$H_{cc} = I_{cc} \omega$$

Ecuación para obtener la suma de los momentos de los elementos mecánicos que actúan sobre un cuerpo rígido.

$$M_{cc} = I_{cc} \alpha$$

Momento de un sistema de fuerzas y/o pares que actúan sobre un cuerpo, con respecto el eje CC.

$$M_{cc} = \sum_{i=1}^n (p_i * F_i)$$

Primera forma de la ecuación del trabajo y la energía para un cuerpo rígido que realiza un movimiento plano general.

$$\int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}_c + \sum_{i=1}^n \int_1^2 \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{p}_i + \sum_{j=1}^n \int_1^2 Q_j d\theta_j = \frac{1}{2} M V_c^2 + \frac{1}{2} I_{cc} \omega^2$$

Ecuación del impulso y la cantidad de movimiento angulares.

$$\int_1^2 M_{cc} dt = I_{cc} (\omega_2 - \omega_1)$$

Modelo matemático correspondiente a las vibraciones libres con un grado de libertad.

$$\ddot{X} + \omega_n^2 X = 0 \text{ con } \omega_n^2 = \text{cte}$$

Modelo matemático correspondiente a las vibraciones forzadas con un grado de libertad.

$$\ddot{X} + \omega_n^2 X = \frac{F_e}{m}$$

donde  $\omega_n^2 = \text{cte}$ .

**Trabajo, energía y conservación de la energía**

$$U = \vec{F} \cdot \vec{r}$$

$$dU = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$P = \frac{U}{t} = \frac{\vec{F} \cdot \vec{r}}{t} = \vec{F} \cdot \vec{v} \quad P: \text{potencia}$$

$$\eta = \frac{P_{sal}}{P_{ent}} \quad \eta: \text{eficiencia}$$

$$U = \Delta K = K_f - K_i$$

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \quad K: \text{energía cinética}$$

$$W = -\Delta V = V_f - V_i \quad V: \text{energía potencial}$$

$$V(y) = mgy$$

$$V_e = \frac{1}{2}kx^2$$

**Impulso e ímpetu**

$$\vec{I} = \int \vec{F} dt$$

$$\vec{I} = \Delta \vec{p}$$

$$\vec{p} = m\vec{v} \quad p: \text{ímpetu}$$

$$\Delta \vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i = \int \vec{F} dt \quad \Delta \vec{p}: \text{impulso}$$

**Formulario para el sustentante del**

Examen General para el Egreso de la Licenciatura en Ingeniería Electrónica (EGEL-IELECTRO)

**Dirección del Programa de Evaluación de Egreso (EGEL) Diseño, Ingenierías y Arquitectura****Electricidad y magnetismo**

$$\vec{F} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \left( \frac{\vec{r}}{r} \right) \quad |\vec{F}| = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \quad \vec{r} = r_1 - r_2$$

$$E = \frac{\vec{F}}{q}$$

$$\Phi_E = \int \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q}{\epsilon_0} \quad \Phi_E : \text{flujo eléctrico}$$

$$V = k \frac{q}{r} \quad V : \text{potencial electrostático}$$

$$V_b - V_a = \frac{U_b - U_a}{q} = -\frac{W_{ab}}{q} = -\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$U = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{i-1} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} \quad U : \text{energía potencial electrostática}$$

**Capacitancia**

$$q = CV \quad C : \text{capacitancia}$$

$$C = K\epsilon_0 \frac{A}{d} \quad \text{Capacitor de placas paralelas}$$

$$C = \epsilon \frac{A}{d} \quad \epsilon = k\epsilon_0 \quad k : \text{Constante dieléctrica}$$

$$C = k\epsilon_0 \frac{2\pi l}{\ln(b/a)} \quad \text{Capacitor cilíndrico}$$

$$U = \frac{q^2}{2C} = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} qV \quad U : \text{energía almacenada en un capacitor}$$

$$u = \frac{1}{2} k\epsilon_0 E^2 \quad u : \text{densidad de energía}$$

**Corriente, resistencia y fuerza electromagnética**

$$i = \frac{dq}{dt} \quad i: \text{corriente eléctrica}$$

$$i = nqvA$$

$$j = \frac{i}{A} = \sum_i n_i q_i v_i \quad j: \text{densidad de corriente, } A: \text{área}$$

$$\rho = \frac{E}{j} \quad \rho: \text{resistividad}$$

$$R = \frac{V}{i} = \rho \frac{l}{A} \quad R: \text{resistencia}$$

$$R = R_0 (1 + \alpha \Delta t) \quad \text{Variación de } R \text{ con la temperatura}$$

$$V_{ab} = \sum IR - \sum \varepsilon$$

$$\sum i_{ent} = \sum i_{sal}$$

$$\sum \text{Elevaciones de potencial} = \sum \text{Caídas de potencial} \quad \sum v_i = 0$$

$$P = Vi = Ri^2 = \frac{V^2}{R} \quad P: \text{potencia eléctrica}$$

### Magnetismo

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} \quad \vec{v}: \text{velocidad}, \quad \vec{B}: \text{campo magnético}$$

$$\vec{F} = i\vec{l} \times \vec{B} \quad \vec{l}: \text{elemento de longitud}$$

$$\tau = NiAB\sin\theta$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i$$

$$\Phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \quad r: \text{distancia}$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2a}$$

$$B = \frac{\mu_0 Ni}{2\pi r} \quad N: \text{número de vueltas}$$

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \sin\theta d\theta \quad r: \text{radio}$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} (\cos\theta_1 - \cos\theta_2)$$

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt} \quad \varepsilon: \text{fuerza electromagnética}$$

$$\varepsilon = -vBl$$

$$\varepsilon = \frac{d\Phi}{dt}$$

**Equivalencias**

## Longitud

	m	in	ft	mi
1 m	1	39.37	3.281	$6.214 \times 10^{-4}$
1 in	$2.54 \times 10^{-2}$	1	$8.333 \times 10^{-2}$	$1.578 \times 10^{-5}$
1 ft	0.3048	12	1	$1.894 \times 10^{-4}$
1 mi	1609	$6.336 \times 10^4$	5280	1

## Masa

	Kg	uma	lb
1 kg	1	$6.022 \times 10^{26}$	2.205
1 uma	$1.661 \times 10^{-27}$	1	$3.662 \times 10^{-27}$
1 lb	0.4536	$2.732 \times 10^{26}$	1

## Fuerza

	dina	N	lb <sub>f</sub>	kg <sub>f</sub>
1 dina	1	$10^{-5}$	$2.248 \times 10^{-6}$	$1.020 \times 10^{-6}$
1 N	$10^5$	1	0.2248	0.1020
1 lb <sub>f</sub>	$4.448 \times 10^5$	4.448	1	0.4536
1 kg <sub>f</sub>	$9.807 \times 10^5$	9.807	2.205	1

## Presión

	atm	mm Hg	Pa	bar
1 atm	1	760	$1.013 \times 10^5$	1.013
1 mm Hg	$1.316 \times 10^{-3}$	1	133.3	$1.333 \times 10^{-3}$
1 Pa	$9.869 \times 10^{-6}$	$7.501 \times 10^{-3}$	1	$10^{-5}$
1 bar	0.987	750.062	$10^5$	1

## Energía, trabajo, calor

	Btu	HP·h	J	cal	kWh	eV
1 Btu	1	$3.929 \times 10^{-4}$	1055	252	$2.930 \times 10^{-4}$	$6.585 \times 10^{21}$
1 HP·h	2545	1	$2.385 \times 10^6$	$6.413 \times 10^5$	0.7457	$1.676 \times 10^{25}$
1 J	$9.481 \times 10^{-4}$	$3.725 \times 10^{-7}$	1	0.2389	$2.778 \times 10^{-7}$	$6.242 \times 10^{18}$
1 cal	$3.969 \times 10^{-3}$	$1.560 \times 10^{-6}$	4.186	1	$1.163 \times 10^{-6}$	$2.613 \times 10^{19}$
1 kWh	3413	1.341	$3.600 \times 10^6$	$8.600 \times 10^5$	1	$2.247 \times 10^{25}$
1 eV	$1.519 \times 10^{-22}$	$5.967 \times 10^{-26}$	$1.602 \times 10^{-19}$	$3.827 \times 10^{-20}$	$4.450 \times 10^{-26}$	1

## Campo magnético

	gauss	T
1 gauss	1	$10^{-4}$
1 tesla	$10^4$	1

## Flujo magnético

INGENIERIA ELECTRONICA FORMULARIO 2019, EXAMEN CENEVAL ACTUALIZADO  
**Formulario para el sustentante del**  
Examen General para el Egreso de la Licenciatura en Ingeniería Electrónica (EGEL-IELECTRO)  
**Dirección del Programa de Evaluación de Egreso (EGEL) Diseño, Ingenierías y Arquitectura**

	maxwell	Wb
1 maxwell	1	$10^{-8}$
1 weber	$10^8$	1

$$1 \text{ rpm} = 6.283 \text{ rad/min}$$

**Química**

## Constantes

Carga del electrón =  $-1.6021 \times 10^{-19} \text{ C}$

Carga del protón =  $1.6021 \times 10^{-19} \text{ C}$

Masa electrón =  $9.1094 \times 10^{-31} \text{ kg}$

Masa protón =  $1.673 \times 10^{-27} \text{ kg}$

Constante de Boltzmann =  $1.3805 \times 10^{-23} \text{ J/K}$

Constante de Planck =  $6.6261 \times 10^{-34} \text{ J s}$

Constante de Avogadro =  $6.022 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$

Constante gravitacional G =  $6.67384 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$

Constante dieléctrica  $\epsilon_0 = 8.8542 \times 10^{-12} \text{ F/m}$

Constante de permeabilidad =  $4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m} = 1.2566 \times 10^{-6} \text{ H/m}$

Electrón-volt (eV) =  $1.6021 \times 10^{-19} \text{ J}$

Radio medio de la Tierra =  $6.378 \times 10^6 \text{ m}$

Distancia de la Tierra a la Luna =  $3.844 \times 10^8 \text{ m}$

Masa de la Tierra =  $5.972 \times 10^{24} \text{ kg}$

Masa de la Luna =  $7.349 \times 10^{22} \text{ kg}$

Aceleración en la superficie de la:

Luna  $1.62 \text{ m/s}^2$

Tierra  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$

$\rho_{\text{Cu}} = 1.71 \times 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$

$\rho_{\text{Al}} = 2.82 \times 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$

$\rho_{\text{Ag}} = 1.62 \times 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$

$\rho_{\text{Fe}} = 9.71 \times 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$

$\bar{\delta}_{\text{Cu}} = 8.96 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$

$\bar{\delta}_{\text{Al}} = 2.7 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$

$\bar{\delta}_{\text{madera}} = 0.6 - 0.9 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$

Formulario para el sustentante del

Examen General para el Egreso de la Licenciatura en Ingeniería Electrónica (EGEL-IELECTRO)

Dirección del Programa de Evaluación de Egreso (EGEL) Diseño, Ingenierías y Arquitectura

## Tabla Periódica de los elementos

**Notación:**

1	1.00797	1	H	Peso atómico
-	-252.7	1	H	Símbolo
0.071	0.071	1	H	Estructura atómica
1	1.00797	1	H	Nombre

18  
VIII

grupo																		18												
I																		VIII												
1																		2												
II																		10												
III																		8												
IV																		6												
V																		4												
VI																		2												
VII																		0												
1	1.00797 1 H Hidrógeno																	2	4.0026 2 He Helio											
2	3 6.941 3 Li Litio	4 9.0122 4 Be Berilio																	5	10.811 3 B Boro	6	12.01115 3,4 C Carbono	7	14.0067 1,3,3,3,5 N Nitrógeno	8	15.9994 2 O Oxígeno	9	18.9984 -1 F Flúor	10	20.179 0 Ne Neón
3	11 22.9898 3 Na Sodio	12 24.305 3 Mg Magnesio																	13	26.9815 3 Al Aluminio	14	28.086 3 Si Silicio	15	30.9738 3 P Fósforo	16	32.064 4 S Azufre	17	35.453 3,3,3,5 Cl Cloro	18	39.948 0 Ar Argón
4	19 39.098 4 K Potasio	20 40.08 4 Ca Calcio	21 44.956 3 Sc Escandio	22 47.88 3,3,4 Ti Titanio	23 50.942 3,3,4,5 V Vanadio	24 51.996 3,3,4,5,6 Cr Cromo	25 54.938 3,3,4,6,7 Mn Manganeso	26 55.847 3,3 Fe Hierro	27 58.93 3,3 Co Cobalto	28 58.71 3,3 Ni Níquel	29 63.54 3,3 Cu Cobre	30 65.37 3 Zn Zinc	31 69.72 3 Ga Galio	32 72.59 3 Ge Germanio	33 74.922 3,3,4 As Arsénico	34 78.96 3,3,4,6 Se Selenio	35 79.904 3,3,3,5,7 Br Bromo	36 83.80 0 Kr Cripton												
5	37 85.47 5 Rb Rubidio	38 87.62 5 Sr Estroncio	39 89.906 3 Y Itrio	40 91.22 3,3,4 Zr Circonio	41 92.906 3,3,4,5 Nb Niobio	42 95.94 3,3,4,5,6 Mo Molibdeno	43 (97) 3,3,4,6,7 Tc Tecnecio	44 101.07 3,3,4,6,8 Ru Rutenio	45 102.95 3,3,4,6 Rh Rodio	46 106.4 3,3,4,6,8 Pd Paladio	47 107.87 3,3 Ag Plata	48 112.40 3 Cd Cadmio	49 114.82 3 In Indio	50 118.69 3,3,5,7 Sn Estaño	51 127.75 3,3,5,7 Sb Antimonio	52 127.60 3,3,4,6 Te Teluro	53 126.904 3,3,3,5,7 I Yodo	54 131.30 0 Xe Xenón												
6	55 132.905 6 Cs Cesio	56 137.34 6 Ba Bario	57 174.97 3 Lu Lutecio	72 178.46 3,3,4 Hf Hafnio	73 180.948 3,3,4,5 Ta Tántalo	74 183.85 3,3,4,5,6 W Volframio	75 186.2 3,4,6,7 Re Renio	76 190.2 3,3,4,6,8 Os Osmio	77 192.2 3,3,4,6 Ir Iridio	78 195.09 3,4 Pt Platino	79 196.967 3,3 Au Oro	80 200.59 3 Hg Mercurio	81 204.37 3 Tl Talio	82 207.19 3,4 Pb Plomo	83 208.980 3,5 Bi Bismuto	84 (210) 4,6 Po Polonio	85 (210) 4,6 At Astatio	86 (222) 3 Rn Radón												
7	87 (223) 7 Fr Francio	88 (226) 7 Ra Radio	103 (262) 3 Lr Laurencio	104 (261) 3 Rf Rutherfordio	105 (262) 3 Db Dubnio	106 (263) 3 Sg Seaborgio	107 (262) 3 Bh Bohrio	108 (265) 3 Hs Hassio	109 (266) 3 Mt Meitnerio	110 (269) 3 Uun Ununnilio	111 (272) 3 Uuu Unununio	112 (277) 3 Uub Ununbio	113 3 Uut Ununtrio	114 (283) 3 Uuq Ununcuadio	115 3 Unp Ununpentio	116 (289) 3 Uuh Ununhexio	117 3 Uus Ununseptio	118 (293) 3 Uuo Ununoctio												
		Lantánidos *		57 138.91 3 La Lantano	58 140.12 3,4 Ce Cerio	59 140.907 3,4 Pr Praseodimio	60 144.24 3,4 Nd Neodimio	61 (147) 3 Pm Promecio	62 150.35 3,3 Sm Samario	63 151.96 3,3 Eu Europio	64 157.25 3,3 Gd Gadolinio	65 158.924 3,4 Tb Terbio	66 162.50 3,4 Dy Disprobio	67 164.930 3,4 Ho Holmio	68 167.26 3,4 Er Erbio	69 168.934 3,3 Tm Tulio	70 173.04 3,3 Yb Iterbio													
		Actinidos *		89 (227) 3 Ac Actinio	90 232.038 3 Th Torio	91 (231) 3,4 Pa Protactinio	92 238.03 3,4,5,6 U Uranio	93 (237) 3,4,5,6 Np Neptunio	94 (242) 3,4,5,6 Pu Plutonio	95 (243) 3,4,5,6 Am Americio	96 (247) 3,4 Cm Curio	97 (251) 3,4 Bk Berkelio	98 (254) 3,4 Cf Californio	99 (257) 3,4 Es Einstenio	100 (261) 3,4 Fm Fermio	101 (265) 3,4 Md Mendelevio	102 (269) 3,4 No Nobelio													

**Referencias:**

No metales	Alcalinos	Alcalinotérreos	Metales de transición	Metales del bloque p	Metaloides	Halógenos	Gases nobles
------------	-----------	-----------------	-----------------------	----------------------	------------	-----------	--------------

(1) base en peso atómico del carbono 12  
 ( ) indica el más estable o el isótopo más conocido  
 El autor original del trabajo es el Ingeniero Alejandro Sosa Torres, y lo publica bajo licencia CC BY

**Análisis de circuitos eléctricos****Ley de Ohm con fasores**

$$I = \frac{V}{Z}$$

donde:

I = Corriente [A]

V= Voltaje [V]

Z = Impedancia [ $\Omega$ ]

**Voltaje y corriente en elementos reactivos(con condiciones iniciales iguales a cero)**

Capacitor

$$v_C(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt \qquad i_C(t) = C \frac{dv(t)}{dt}$$

Inductor libre de acoplamientos magnéticos

$$i_L(t) = \frac{1}{L} \int v(t) dt \qquad v_L(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$

Inductor con acoplamientos magnéticos

$$i_k(t) = \sum_{l=1}^N \Gamma_{kl} \int v_l(t) dt$$

$$k = 1, 2, 3, \dots, N$$

$$v_k(t) = \sum_{l=1}^N L_{kl} \frac{di_l(t)}{dt}$$

$$k = 1, 2, 3, \dots, N$$

$$\Gamma_{kl} = \frac{\text{cof}L_{lk}}{\Delta L_{kl}}$$

donde:

$L_{kl}$  = Inductancia mutua entre el inductor k y el inductor l

$\Gamma_{kl}$  = Invertancia mutua entre los inductores k y l

Cof  $L_{lk}$  = Cofactor del la inductancia mutua  $L_{lk}$

$\Delta L_{kl}$  = Determinante del sistema de inductancias propias y mutuas

**Formulario para el sustentante del**

Examen General para el Egreso de la Licenciatura en Ingeniería Electrónica (EGEL-IELECTRO)

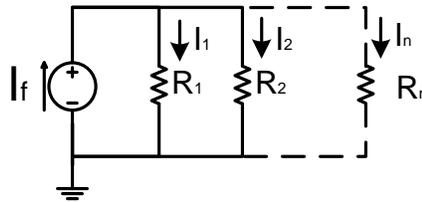
**Dirección del Programa de Evaluación de Egreso (EGEL) Diseño, Ingenierías y Arquitectura**

k = k-ésimo inductor

N = número total de inductores que se encuentren acoplados

**Divisor de corriente**

Si el circuito está integrado por n elementos:



$$I_x = I_f \frac{R_{Total\ paralelo}}{R_x}$$

$$I_x = I_f \frac{Z_{Total\ paralelo}}{Z_x}$$

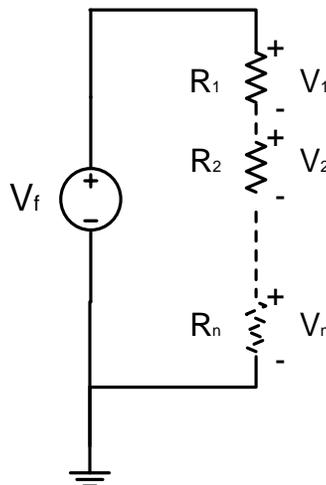
donde:

I<sub>x</sub> = Corriente en el resistor o impedancia de interés

R<sub>x</sub> = Resistor de interés

Z<sub>x</sub> = Impedancia de interés

**Divisor de voltaje**



$$V_X = V_f \frac{R_X}{R_{Total\ serie}}$$

### Leyes de Kirchhoff

Ley de Kirchhoff de voltaje

Ley de Kirchhoff de corriente

$$\sum_{k=1}^{N_e} V_k = 0$$

$$\sum_{k=1}^{N_i} I_k = 0$$

donde:

$N_e$  = Número de caídas o elevaciones de tensión en una malla cerrada

$N_i$  = Número de corrientes que entran o salen a un nodo

$K$  = k-ésimo elemento

**Formulario para el sustentante del**

Examen General para el Egreso de la Licenciatura en Ingeniería Electrónica (EGEL-IELECTRO)

**Dirección del Programa de Evaluación de Egreso (EGEL) Diseño, Ingenierías y Arquitectura****Potencia**

Potencia activa

$$P = VI \cos \theta \quad [W]$$

$$P = \frac{V^2}{|Z|} \cos \theta \quad [W]$$

$$P = I^2 |Z| \cos \theta \quad [W]$$

Potencia reactiva

$$Q = VI \sin \theta \quad [VAR]$$

$$Q = \frac{V^2}{|Z|} \sin \theta \quad [VAR]$$

$$Q = I^2 |Z| \sin \theta \quad [VAR]$$

Potencia compleja

$$S = VI^* \quad [VA]$$

Factor de potencia

$$f_p = \cos(\theta)$$

**Resonancia RLC serie**

Frecuencia de resonancia

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

Frecuencias de corte

$$f_1 = \frac{1}{2\pi} \left[ -\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}} \right]$$

$$f_2 = \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}} \right]$$

Ancho de banda

$$BW = f_2 - f_1$$

$$BW = \frac{R}{L}$$

Factor de calidad

$$Q = \frac{\omega_0}{BW}$$

$$Q_s = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

**Formulario para el sustentante del**

Examen General para el Egreso de la Licenciatura en Ingeniería Electrónica (EGEL-IELECTRO)

**Dirección del Programa de Evaluación de Egreso (EGEL) Diseño, Ingenierías y Arquitectura****Resonancia RLC paralelo**

Frecuencia de resonancia

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

Frecuencias de corte

$$f_1 = \frac{1}{2\pi} \left[ -\frac{1}{2RC} + \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 + \frac{1}{LC}} \right]$$

$$f_2 = \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{1}{2RC} + \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 + \frac{1}{LC}} \right]$$

Ancho de banda

$$BW = f_2 - f_1$$

$$BW = \frac{1}{RC}$$

Factor de calidad

$$Q = \frac{\omega_0}{BW}$$

$$Q_p = R\sqrt{\frac{C}{L}}$$

### Circuitos excitados con señales senoidales de diferentes frecuencias

Sea  $v(t)$  una función de la forma:

$$v(t) = V_o + V_1 \text{sen}(\omega_1 t + \alpha_1) + V_2 \text{sen}(\omega_2 t + \alpha_2) + \dots + V_n \text{sen}(\omega_n t + \alpha_n)$$

Entonces, el voltaje eficaz (RMS) en una red excitada con una tensión  $v(t)$  es:

$$V_{rms} = \sqrt{V_o^2 + \frac{1}{2} \left( \sum_{k=1}^n V_k^2 \right)}$$

donde  $k = 1, 2, 3, \dots, n$

Sea  $i(t)$  una función de la forma:

$$i(t) = I_o + I_1 \text{sen}(\omega_1 t + \beta_1) + I_2 \text{sen}(\omega_2 t + \beta_2) + \dots + I_n \text{sen}(\omega_n t + \beta_n)$$

La corriente eficaz (RMS) en una red en la que circula una corriente  $i(t)$  es:

$$I_{rms} = \sqrt{I_o^2 + \frac{1}{2} \left( \sum_{k=1}^n I_k^2 \right)}$$

donde  $k = 1, 2, 3, \dots, n$

La potencia media es:

$$P = V_o I_o + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n V_k I_k \cos(\alpha_k - \beta_k)$$

donde  $k = 1, 2, 3, \dots, n$

**Formulario para el sustentante del**

Examen General para el Egreso de la Licenciatura en Ingeniería Electrónica (EGEL-IELECTRO)

**Dirección del Programa de Evaluación de Egreso (EGEL) Diseño, Ingenierías y Arquitectura****Impedancia y admitancia de una red pasiva de dos terminales**

Impedancia

$$Z_t = \frac{\Delta Z_{kl}}{\text{cof} Z_{kk}}$$

donde:

 $\Delta Z_{kl}$  = Determinante de las impedancias propias y mutuas entre mallas $\text{cof} Z_{kk}$  = Cofactor de la impedancia de malla donde están las dos terminales

Admitancia

$$Y_t = \frac{\Delta Y_{kl}}{\text{cof} Y_{kk}}$$

donde:

 $\Delta Y_{kl}$  = Determinante de las admitancias propias y mutuas entre nodos $\text{cof} Y_{kk}$  = Cofactor de la admitancia de nodo donde están las dos terminales

## Teoremas de redes

### Teorema de Thevenin

Pasos para obtener el circuito equivalente de Thevenin

- Identificar los nodos A y B dentro del circuito donde se desea encontrar el circuito equivalente de Thevenin.
- Desconectar del circuito original el circuito del que se desea obtener su equivalente. Entre los nodos A y B debe considerarse un circuito abierto.
- Calcular el voltaje en los puntos A y B ( $V_{th}$ ).
- Poner en cortocircuito los nodos A y B y calcular la corriente de cortocircuito ( $I_{cc}$ ).
- Calcular la impedancia de Thevenin como:

$$Z_{th} = \frac{V_{th}}{I_{cc}}$$

- Construir el circuito equivalente de Thevenin en los nodos A y B con  $V_{th}$  en serie con  $Z_{th}$ .
- El teorema de Thevenin se puede aplicar para redes que cuenten con acoplamientos magnéticos, siempre y cuando, éste no se encuentre dentro del circuito al que se desea encontrar el equivalente.

### Teorema de Norton

Pasos para obtener el circuito equivalente de Norton

- Identificar los nodos A y B dentro del circuito donde se desea encontrar el circuito equivalente de Norton.
- Desconectar del circuito original el circuito del que se desea obtener su equivalente. Entre los nodos A y B debe considerarse un cortocircuito.
- Calcular la corriente de Norton que circula entre los nodos A y B ( $I_N$ ).
- Considerar entre los nodos A y B un circuito abierto y calcular el voltaje de circuito abierto ( $V_{ca}$ ).
- Calcular la impedancia de Norton como:

$$Z_N = \frac{V_{ca}}{I_N}$$

- Construir el circuito equivalente de Norton.
- El teorema de Norton se puede aplicar para redes que cuenten con acoplamientos magnéticos, siempre y cuando, éste no se encuentre dentro del circuito al que se desea encontrar el equivalente.

### Teorema de reciprocidad

Si se tiene un circuito formado sólo por elementos pasivos, entonces, es posible aplicar el teorema de reciprocidad. Si este circuito tiene una fuente de corriente o voltaje a la entrada, entonces, los pasos para aplicar el teorema de intercambio de fuentes son:

- Identificar los nodos A y B donde se va a aplicar el teorema de reciprocidad.
- Calcular el voltaje o corriente entre A y B.
- Desconectar la fuente de entrada y conectarla entre A y B.
- Si la fuente es de voltaje, la entrada se cortocircuita. Si la fuente es de corriente, la entrada se pone en circuito abierto.
- La corriente o el voltaje, según sea el caso, a la entrada del circuito es la misma que en el caso original.

### **Teorema de superposición**

Si el circuito es lineal es posible aplicar este teorema. Los pasos necesarios son:

- Identificar el número de fuentes que se encuentran en el circuito.
- Seleccionar una de ellas y para el resto de las fuentes debe considerarse lo siguiente: si es una fuente de voltaje, ésta debe substituirse por un cortocircuito y si es una fuente de corriente, ésta debe substituirse por un circuito abierto.
- Obtener los voltajes y corrientes en el circuito.
- Repetir el proceso según el número de fuentes que haya en el circuito seleccionando en cada iteración una fuente diferente.
- Sumar los voltajes y corrientes obtenidos para cada una de las fuentes dadas en el circuito.

**Parámetros de dos puertos****Parámetros de impedancias(Z)**

$$V_1 = Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2$$

$$V_2 = Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2$$

Los parámetros de impedancias están dados por:

$$Z_{11} = \left. \frac{V_1}{I_1} \right|_{I_2=0} \quad \text{Impedancia de entrada}$$

$$Z_{21} = \left. \frac{V_2}{I_1} \right|_{I_2=0} \quad \text{Impedancia de transferencia directa}$$

$$Z_{12} = \left. \frac{V_1}{I_2} \right|_{I_1=0} \quad \text{Impedancia de transferencia inversa}$$

$$Z_{22} = \left. \frac{V_2}{I_2} \right|_{I_1=0} \quad \text{Impedancia de salida}$$

**Parámetros de admitancias (Y)**

$$I_1 = Y_{11}V_1 + Y_{12}V_2$$

$$I_2 = Y_{21}V_1 + Y_{22}V_2$$

$$Y_{11} = \left. \frac{I_1}{V_1} \right|_{V_2=0} \quad \text{Admitancia de entrada}$$

$$Y_{21} = \left. \frac{I_2}{V_1} \right|_{V_2=0} \quad \text{Admitancia de transferencia directa}$$

$$Y_{12} = \left. \frac{I_1}{V_2} \right|_{V_1=0} \quad \text{Admitancia de transferencia inversa}$$

$$Y_{22} = \left. \frac{I_2}{V_2} \right|_{V_1=0} \quad \text{Admitancia de salida}$$

**Formulario para el sustentante del**

Examen General para el Egreso de la Licenciatura en Ingeniería Electrónica (EGEL-IELECTRO)

**Dirección del Programa de Evaluación de Egreso (EGEL) Diseño, Ingenierías y Arquitectura****Parámetros híbridos directos**

$$V_1 = h_{11}I_1 + h_{12}V_2$$

$$I_2 = h_{21}I_1 + h_{22}V_2$$

$$h_{11} = \left. \frac{V_1}{I_1} \right|_{V_2=0}$$

Impedancia de entrada con terminales de salida en cortocircuito

$$h_{21} = \left. \frac{I_2}{I_1} \right|_{V_2=0}$$

Ganancia en corriente

$$h_{12} = \left. \frac{V_1}{V_2} \right|_{I_1=0}$$

Inverso de la ganancia de voltaje

$$h_{22} = \left. \frac{I_2}{V_2} \right|_{I_1=0}$$

Admitancia de salida con terminales de entrada abiertas

**Parámetros híbridos inversos**

$$I_1 = g_{11}V_1 + g_{12}I_2$$

$$V_2 = g_{21}V_1 + g_{22}I_2$$

$$g_{11} = \left. \frac{I_1}{V_1} \right|_{I_2=0}$$

Admitancia de entrada con terminales de salida abiertas

$$g_{21} = \left. \frac{V_2}{V_1} \right|_{I_2=0}$$

Ganancia en voltaje

$$g_{12} = \left. \frac{I_1}{I_2} \right|_{V_1=0}$$

Inverso de la ganancia corriente

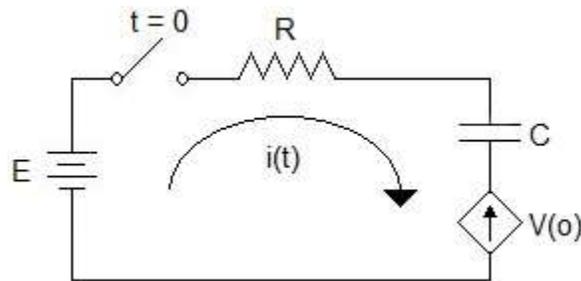
$$g_{22} = \left. \frac{V_2}{I_2} \right|_{V_1=0}$$

Impedancia de salida con terminales de entrada en cortocircuito

**Respuesta transitoria**

Condiciones iniciales y finales de los elementos

Elemento	Circuito equivalente inicial para $t < 0$		Circuito equivalente para $t \gg 0$
	Cargado	Descargado	
R			Resistencia
L	$i_L(0^-) = i_L(0^+)$ Fuente ideal de corriente	$i_L(0^+) = 0$ Circuito abierto	Cortocircuito
C	$v_C(0^-) = v_C(0^+)$ Fuente ideal de Voltaje	$V_C(0^+) = 0$ Cortocircuito	Circuito abierto

**Respuesta total en circuitos RC**

Para la corriente

$$i(t) = \frac{(E - v_C(0)) e^{-\frac{t}{RC}}}{R} \quad [A]$$

Para el capacitor

$$v_C(t) = E + (v_C(0) - E) e^{-\frac{t}{RC}} \quad [V]$$

Para la resistencia

$$v_R(t) = Ri(t) = (E - v_C(0)) e^{-\frac{t}{RC}} \quad [V]$$

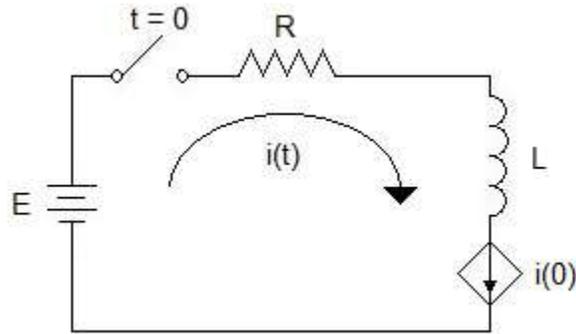
Constante de tiempo

$$\tau = RC \quad [s]$$

donde  $v_C(0)$  es el voltaje inicial en el capacitor.

**Formulario para el sustentante del**

Examen General para el Egreso de la Licenciatura en Ingeniería Electrónica (EGEL-IELECTRO)

**Dirección del Programa de Evaluación de Egreso (EGEL) Diseño, Ingenierías y Arquitectura****Respuesta total en circuitos RL**

Para la corriente

$$i(t) = \frac{E}{R} \left( 1 - e^{-\frac{Rt}{L}} \right) + i(0) e^{-\frac{Rt}{L}} \quad [A]$$

Para el resistor

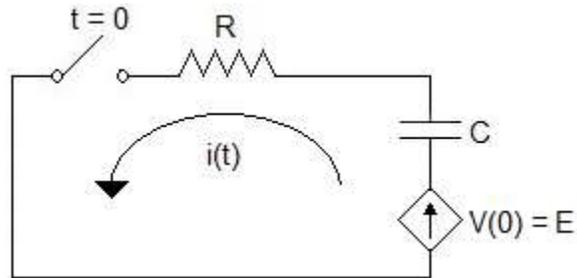
$$v_R(t) = Ri(t) = E \left( 1 - e^{-\frac{Rt}{L}} \right) + Ri(0) e^{-\frac{Rt}{L}} \quad [V]$$

Para el inductor

$$v_L(t) = L \frac{di(t)}{dt} = E e^{-\frac{Rt}{L}} - Ri(0) e^{-\frac{Rt}{L}} \quad [V]$$

La constante de tiempo es:

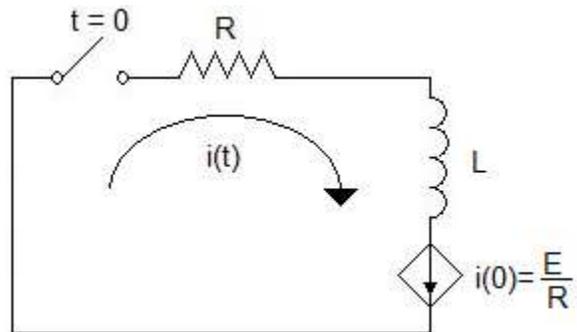
$$\tau = \frac{L}{R} \quad [s]$$

**Respuesta libre en un circuito RC**

$$i(t) = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \text{ [A]}$$

$$v_R = Ri(t) = E e^{-\frac{t}{RC}} \text{ [V]}$$

$$v_C(t) = E - v_R(t) = E \left( 1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right) \text{ [V]}$$

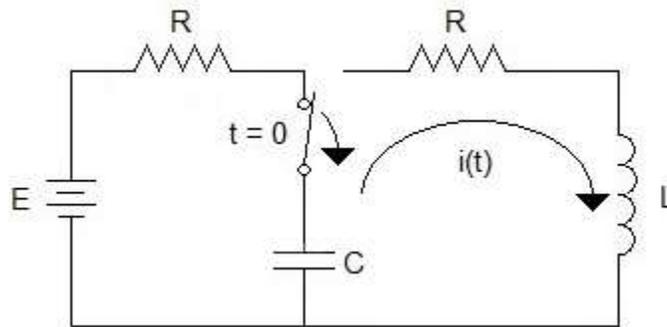
**Respuesta libre en un circuito RL**

$$i(t) = \frac{E}{R} e^{-\frac{Rt}{L}} \text{ [A]}$$

$$v_R(t) = E e^{-\frac{Rt}{L}} \text{ [V]}$$

$$v_L(t) = -E e^{-\frac{Rt}{L}} \text{ [V]}$$

**Respuesta libre de un circuito RLC**



Solución General para  $i(t)$

$$i(t) = k_1 e^{D_1 t} + k_2 e^{D_2 t}$$

donde  $D_1$  y  $D_2$  son las raíces:

$$D_1 = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

$$D_2 = -\frac{R}{2L} - \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

$$\alpha = \frac{R}{2L}$$

$$\omega^2 = \frac{1}{LC}$$

$$\beta = \sqrt{\alpha^2 - \omega^2}$$

$v_c(0^-) = \text{Voltaje inicial en } C$

Caso I:  $(\alpha^2 < \omega^2)$

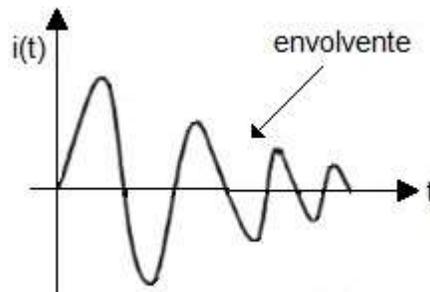
Respuesta bajo amortiguada (raíces complejas conjugadas)

$$i(t) = k_1 e^{(-\alpha + j\beta)t} + k_2 e^{(-\alpha - j\beta)t}$$

$$k_1 = -k_2$$

$$k = \frac{v_c(0^-)}{2\beta L}$$

$$i(t) = \frac{v_c(0^-)}{\beta L} e^{-\alpha t} \text{sen}(\beta t) \text{ [A]}$$



Caso II: ( $\alpha^2 = \omega^2$ )

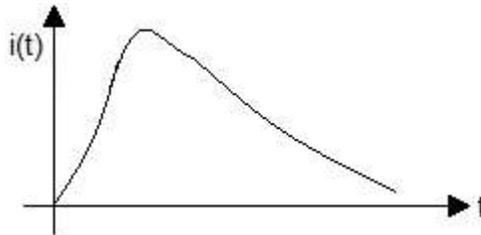
Respuesta críticamente amortiguada (raíces reales repetidas)

$$i(t) = k_1 e^{-\alpha t} + k_2 t e^{-\alpha t}$$

$$k_1 = 0$$

$$k_2 = \frac{v_c(0^-)}{L}$$

$$i(t) = \frac{v_c(0^-)}{L} t e^{-\alpha t} \text{ [A]}$$



Caso III: ( $\alpha^2 > \omega^2$ )

Respuesta sobreamortiguada (raíces reales diferentes)

$$i(t) = k_1 e^{(-\alpha+\beta)t} + k_2 e^{(-\alpha-\beta)t}$$

$$k_1 = -k_2$$

**Formulario para el sustentante del**

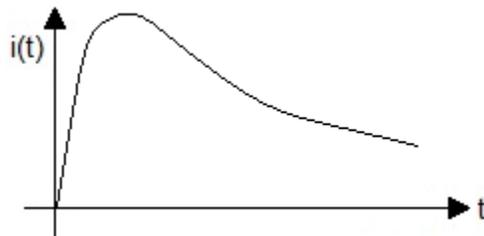
Examen General para el Egreso de la Licenciatura en Ingeniería Electrónica (EGEL-IELECTRO)

**Dirección del Programa de Evaluación de Egreso (EGEL) Diseño, Ingenierías y Arquitectura**

$$k_1 = \frac{v_c(0^-)}{2\beta L}$$

$$k_2 = -\frac{v_c(0^-)}{2\beta L}$$

$$i(t) = \frac{v_c(0^-)}{\beta L} e^{-\alpha t} \sinh(\beta t)$$



**Función de transferencia**

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} \quad \text{Relación de voltajes}$$

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{I_i(s)} \quad \text{Impedancia de transferencia}$$

$$H(s) = \frac{I_o(s)}{I_i(s)} \quad \text{Relación de corrientes}$$

$$H(s) = \frac{I_o(s)}{V_i(s)} \quad \text{Admitancia de transferencia}$$

donde  $I_o(s)$  y  $V_o(s)$  son la corriente y el voltaje en la salida, respectivamente.  $I_i(s)$  y  $V_i(s)$  son la corriente y el voltaje en la entrada, respectivamente.

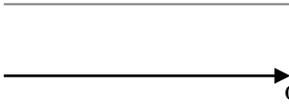
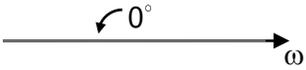
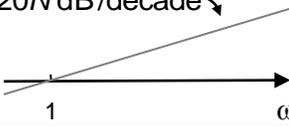
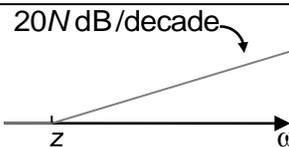
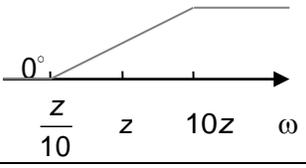
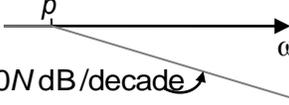
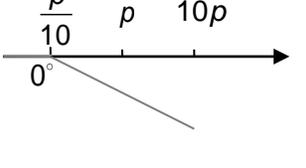
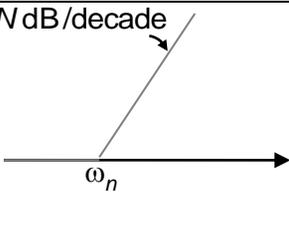
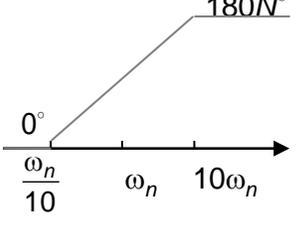
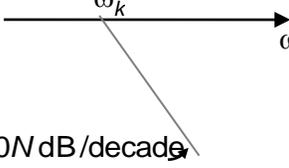
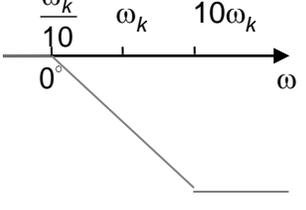
**Formulario para el sustentante del**

Examen General para el Egreso de la Licenciatura en Ingeniería Electrónica (EGEL-IELECTRO)

**Dirección del Programa de Evaluación de Egreso (EGEL) Diseño, Ingenierías y Arquitectura**

**Diagramas de Bode asintóticos**

Summary of Bode straight-line magnitude and phase plots.

Factor	Magnitude	Phase
$K$	$20\log_{10} K$ 	$0^\circ$ 
$(j\omega)^N$	$20N \text{ dB/decade}$ 	$90N^\circ$ 
$\frac{1}{(j\omega)^N}$	$-20N \text{ dB/decade}$ 	$-90N^\circ$ 
$\left(1 + \frac{j\omega}{z}\right)^N$	$20N \text{ dB/decade}$ 	$90N^\circ$ 
$\frac{1}{(1 + j\omega/p)^N}$	$-20N \text{ dB/decade}$ 	$-90N^\circ$ 
$\left[1 + \frac{2j\omega\zeta}{\omega_n} + \left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^N$	$40N \text{ dB/decade}$ 	$180N^\circ$ 
$\frac{1}{\left[1 + 2j\omega\zeta/\omega_k + (j\omega/\omega_k)^2\right]^N}$	$-40N \text{ dB/decade}$ 	$-180N^\circ$ 

**Sistemas acoplados**

Factor de acoplamiento

$$K_{kl} = \frac{L_{lk}}{\sqrt{L_{kk} \cdot L_{ll}}}$$

Inductancia mutua

$$L_{kl} = K_{kl} \sqrt{L_{kk} \cdot L_{ll}}$$

donde:

 $K_{kl}$  = factor de acoplamiento entre los inductores k y l $L_{kl}$  = inductancia mutua entre los inductores k y l $L_{ll}$  = inductancia propia del inductor l $L_{kk}$  = inductancia propia del inductor k

### Sistemas trifásicos

Resistencia y reactancia en serie

La impedancia  $Z$  de una carga reactiva que está formada por una resistencia  $R$  y una reactancia en serie es:

$$Z = R + jX$$

Convirtiéndola a su admitancia equivalente  $Y$ :

$$Y = \frac{R - jX}{|Z|^2}$$

donde:

$$|Z| = \sqrt{R^2 + X^2}$$

Según la ley de Ohm:

$$V = ZI$$

y

$$I = YV$$

Entonces:

$$I = \frac{VR - jVX}{|Z|^2}$$

$$I = \frac{VR}{|Z|^2} - j \frac{VX}{|Z|^2}$$

$$I = I_P - jI_Q$$

donde  $I_P$  e  $I_Q$  son las corrientes activa y reactiva, respectivamente.

La corriente activa  $I_P$  y la corriente reactiva  $I_Q$  son:

$$I_P = \frac{VR}{|Z|^2} = |I| \cos \theta$$

$$I_Q = \frac{VX}{|Z|^2} = |I| \sin \theta$$

donde  $\theta$  está dada por:

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{Q}{P}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{P}{|S|}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{Q}{|S|}\right)$$

Si se aplica una tensión  $V$ , a una carga reactiva  $Z$  y la corriente  $I$  que circula en el circuito, entonces, la potencia compleja  $S$ , potencia activa  $P$  y potencia reactiva  $Q$  están dadas por:

$$S = VI^* = \frac{ZV^2}{|Z|^2} = |I|^2 Z$$

$$P = VI_P = \frac{V^2 R}{|Z|^2}$$

$$Q = VI_Q = \frac{V^2 X}{|Z|^2}$$

El factor de potencia ( $fp$ ) y el factor reactivo ( $fr$ ) son:

$$fp = \cos(\theta) = \frac{R}{|Z|}$$

$$fr = \sen(\theta) = \frac{X}{|Z|}$$

### Potencia trifásica

Para una carga balanceada conectada en estrella con una tensión de línea  $V_{línea}$  y una corriente de línea  $I_{línea}$  :

$$V_{estrella} = \frac{V_{línea}}{\sqrt{3}}$$

$$I_{estrella} = I_{línea}$$

$$Z_{estrella} = \frac{V_{estrella}}{I_{estrella}} = \frac{V_{línea}}{\sqrt{3}I_{estrella}}$$

$$S_{estrella} = 3V_{estrella}I_{estrella} = \sqrt{3}V_{línea}I_{línea} = \frac{V_{línea}^2}{Z_{estrella}} = 3I_{línea}^2 Z_{estrella}$$

Para una carga balanceada conectada en delta con una tensión de línea  $V_{línea}$  y una corriente de línea  $I_{línea}$  :

$$V_{delta} = V_{línea}$$

$$I_{delta} = \frac{I_{línea}}{\sqrt{3}}$$

$$Z_{delta} = \frac{V_{delta}}{I_{delta}} = \sqrt{3} \frac{V_{línea}}{I_{línea}}$$

$$S_{delta} = 3V_{delta}I_{delta} = \frac{3V_{línea}^2}{Z_{delta}} = I_{línea}^2 Z_{delta}$$

Note que la equivalencia entre cargas balanceadas conectadas en estrella y delta es:

$$Z_{delta} = 3Z_{estrella}$$

**Electrónica analógica****Diodo de propósito general**

Ecuación de Shockley del diodo

$$I_D = I_S \left( e^{\frac{q \cdot V_D}{n \cdot k \cdot T}} - 1 \right)$$

donde:

 $I_D$  = Corriente a través del diodo [A] $I_S$  = Corriente de saturación ( $10^{-12}$  A) $V_D$  = Voltaje de polarización directo [V] $q$  = Carga del electrón ( $1.6022 \times 10^{-19}$ ) [C] $n$  = Constante para Ge = 1 y para Si = 1.1 y 1.8 $k$  = Constante de Boltzman  $1.3806 \times 10^{-23}$  [J/K] $T$  = Temperatura absoluta [K]**Diodo Zener**

$$\text{Regulación de línea} = \frac{R_z}{R_z + R_s}$$

$$\text{Regulación de carga} = -(R_z \parallel R_s)$$

$$\text{Regulación Zener} = \frac{R_s}{R_z + R_s}$$

$$V_{z0} = V_z - (R_z \cdot I_z)$$

Para  $R_L = 0$ 

$$I_z = \frac{(V_s - V_{z0})}{(R_z + R_s)}$$

El voltaje de salida está dado por:

$$V_o = V_{z0} + (R_z \cdot I_z)$$

$$R_s = \frac{V_s - V_{z0} - R_z \cdot I_z}{I_z + I_L}$$

En caso de conocer los rangos de  $V_s$  e  $I_L$

$$R_s = \frac{V_{s(\max)} - V_{z0} - R_z \cdot I_{z(\max)}}{I_{z(\max)} + I_{L(\min)}}$$

$$R_s = \frac{V_{s(\min)} - V_{z0} - R_z \cdot I_{z(\min)}}{I_{z(\min)} + I_{L(\max)}}$$

$$P_z = V_z \cdot I_z$$

### Rectificadores de media onda y onda completa (fuentes de alimentación)

	Rectificador de media onda	Rectificador de onda completa
Voltaje de rizo pico-pico	$V_{r(pp)} = \frac{V_m}{f \cdot R_L \cdot C}$	$V_{r(pp)} = \frac{V_m}{2f \cdot R_L \cdot C}$
Voltaje de salida $V_O$	$V_{O(cd)} = \frac{V_m (2f \cdot R_L C - 1)}{2f \cdot R_L \cdot C}$	$V_{O(cd)} = \frac{V_m (4f \cdot R_L C - 1)}{4f \cdot R_L \cdot C}$
Voltaje rizo rms	$V_{r(rms)} = \frac{V_m}{2 \cdot \sqrt{2} \cdot f \cdot R_L \cdot C}$	$V_{r(rms)} = \frac{V_m}{4 \cdot \sqrt{2} \cdot f \cdot R_L \cdot C}$
Factor de rizo	$FR = \frac{1}{\sqrt{2} (2f \cdot R_L \cdot C - 1)}$	$FR = \frac{1}{\sqrt{2} (4f \cdot R_L \cdot C - 1)}$
Cálculo del capacitor	$C = \frac{1}{2f \cdot R_L} \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{2} \cdot RF} \right)$	$C = \frac{1}{4f \cdot R_L} \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{2} \cdot RF} \right)$
Relación $V_{rms}$ y $V_L$	$\frac{V_{rms}}{V_L} \approx \frac{1}{420} \approx 0.0024$	

### Regulación de voltaje

$$Regulación\ línea = \frac{\Delta V_{sal}}{\Delta V_{ent}} \cdot 100\%$$

$$Regulación\ carga = \frac{V_{NL} - V_{FL}}{V_{FL}}$$

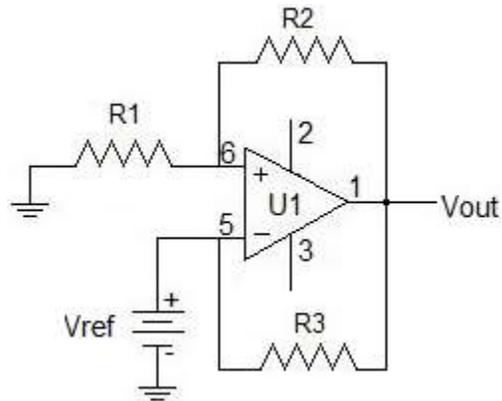
$$Regulación\ de\ carga = \frac{R_{sal}}{R_{FL}} \cdot 100$$

donde:

$V_{NL}$  = Voltaje sin carga

$V_{FL}$  = Voltaje a plena carga

### Regulador básico en serie con OA



$$V_o = \left(1 + \frac{R_2}{R_3}\right) V_{ref}$$

### Reguladores en paralelo lineales básico

$$I_{L(max)} = \frac{V_{in}}{R_L}$$

### Reguladores de conmutación básicos

$$V_o = \left(\frac{t_{off}}{T}\right) V_{in}$$

donde:

$$T = t_{in} + t_{off}$$

### Reguladores de voltaje en circuito integrado

$$V_{sal} = V_{ref} \left( 1 + \frac{R_2}{R_1} \right) + I_{ADJ} R_2$$

$$I_{L(max)} = \frac{V_{sal}}{R_{L1}} + I_G$$

### Transistor de unión bipolar (BJT) Parámetros de corriente directa

$$\beta_{cd} = \frac{I_c}{I_B}$$

$$\alpha_{cd} = \frac{I_c}{I_E}$$

donde:

$\beta_{cd}$ =Ganancia en corriente en CD

$\alpha_{cd}$ =Factor de amplificación de corriente en polarización directa

$I_C$ =Corriente de colector

$I_B$ =Corriente de base

$I_E$ =Corriente de emisor

Corrientes en un transistor

$$I_E = I_C + I_B$$

### Voltaje entre la base y el emisor

$$V_{BE} \cong 0.7 V$$

### Corriente en la base

$$I_B = \frac{V_{CC} - V_{BE}}{R_B}$$

donde:

$V_{BB}$  = Voltaje de polarización en la base

$V_{BE}$  = Voltaje base-emisor

$R_B$  = Resistencia de base

### Voltaje en el colector con respecto al emisor

$$V_{CE} = V_{CC} - I_C R_C$$

donde:

$V_{CC}$  = Voltaje de polarización en el colector

$V_{CE}$  = Voltaje colector-emisor

$R_C$  = Resistencia de colector

**Formulario para el sustentante del**

Examen General para el Egreso de la Licenciatura en Ingeniería Electrónica (EGEL-IELECTRO)

**Dirección del Programa de Evaluación de Egreso (EGEL) Diseño, Ingenierías y Arquitectura****Voltaje en el colector con respecto a la base**

$$V_{CB} = V_{CE} - V_{BE}$$

donde:

 $V_{CB}$  = Voltaje colector-base $V_{CE}$  = Voltaje colector-emisor $R_C$  = Resistencia de colector**Condición de corte**

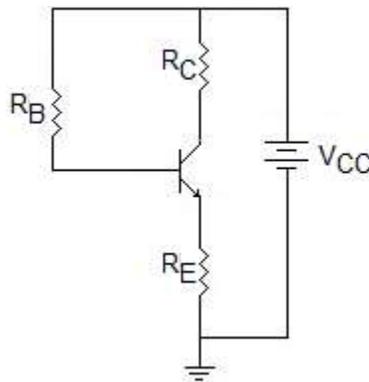
$$V_{CE(corte)} = V_{CC}$$

Corriente de saturación en el colector

$$I_{C(SAT)} = \frac{V_{CC} - V_{CE(SAT)}}{R_C}$$

Corriente de base mínima para saturación

$$I_{B(min)} = \frac{I_{C(SAT)}}{\beta_{cd}}$$

**Polarización****Polarización con realimentación del emisor**

$$V_B = I_E R_E + V_{BE}$$

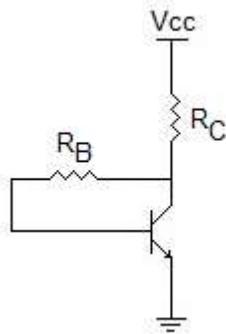
$$V_C = V_{CC} - I_C R_C$$

$$V_E = V_B - V_{BE}$$

$$I_E = \frac{V_{CC} - V_{BE}}{R_E + (R_B / \beta_{cd})}$$

$$I_C \cong I_E$$

### Polarización con realimentación del colector



$$V_C = V_{CC} - I_C R_C$$

$$V_B = V_{BE}$$

$$V_E = 0 \text{ V}$$

$$I_C \cong \frac{V_{CC} - V_{BE}}{R_C}$$

$$I_C = \frac{V_{CC} - V_{BE}}{R_C + \frac{R_B}{\beta_{cd}}}$$

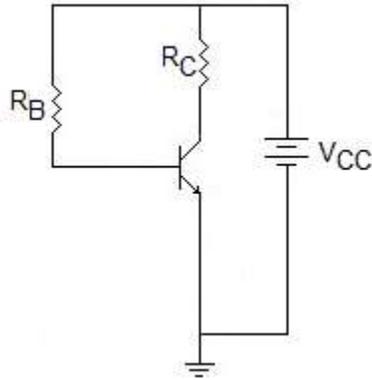
$$V_{CE} = V_{CC} - I_C R_C$$

$$I_E \cong I_C$$

$$I_B = \frac{V_C - V_{BE}}{R_B}$$

**Formulario para el sustentante del**

Examen General para el Egreso de la Licenciatura en Ingeniería Electrónica (EGEL-IELECTRO)

**Dirección del Programa de Evaluación de Egreso (EGEL) Diseño, Ingenierías y Arquitectura****Polarización de base**

$$V_B = V_{BE}$$

$$V_C = V_{CC} - I_C R_C$$

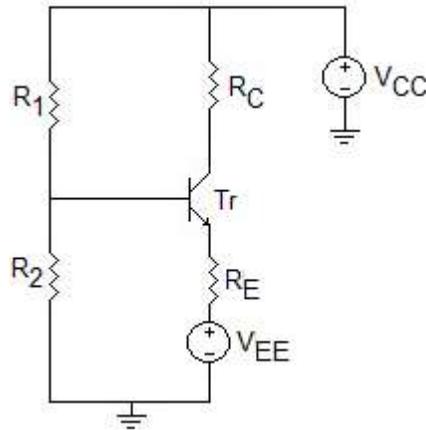
$$V_E = 0 \text{ V}$$

$$I_C = \beta_{cd} \left( \frac{V_{CC} - V_{BE}}{R_B} \right)$$

$$I_E \cong I_C$$

$$I_B = \frac{V_C - V_{BE}}{R_B}$$

$$V_{CE} = V_{CC} - I_C R_C$$

**Polarización del emisor**

$$V_B = V_E + V_{BE}$$

$$V_C = V_{CC} - I_C R_C$$

$$V_E = V_{EE} + I_E R_E$$

$$I_E \cong \frac{-V_{EE} - V_{BE}}{R_E}$$

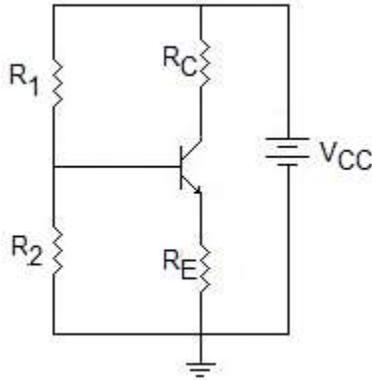
$$I_E = \frac{-V_{EE} - V_{BE}}{R_E + \frac{R_B}{\beta_{cd}}}$$

$$I_E \cong I_C$$

$$I_B = \frac{V_B}{R_B} \quad I_B = \frac{V_B}{R_B}$$

**Formulario para el sustentante del**

Examen General para el Egreso de la Licenciatura en Ingeniería Electrónica (EGEL-IELECTRO)

**Dirección del Programa de Evaluación de Egreso (EGEL) Diseño, Ingenierías y Arquitectura****Polarización con divisor de voltaje**

$$V_B = \left( \frac{R_2}{R_1 + R_2} \right) V_{CC}$$

$$V_C = V_{CC} - I_C R_C$$

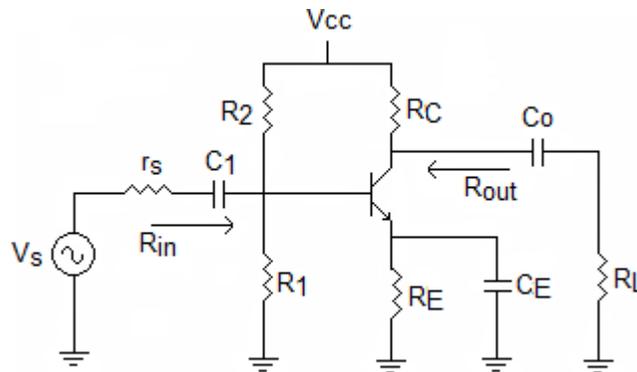
$$V_E = V_B - V_{BE}$$

$$I_E = \frac{V_E}{R_E}$$

$$I_E \cong I_C$$

$$I_E = \frac{V_{TH} - V_{BE}}{R_E + \frac{R_{TH}}{\beta_{cd}}}$$

$$I_B = \frac{V_B}{\beta_{cd} R_E}$$

**Parámetros de corriente alterna (amplificador)****Amplificador emisor común**

Ecuaciones considerando el modelo T en señal pequeña de primer orden

$$r'_e = \frac{25mV}{I_E}$$

$$R_{in} = R_1 \parallel R_2 \parallel (\beta_{ca} \oplus \cdot r'_{in})$$

$$R_{out} \approx R_C \parallel R_L$$

$$A_V = \frac{R_C \parallel R_L}{r'_e}$$

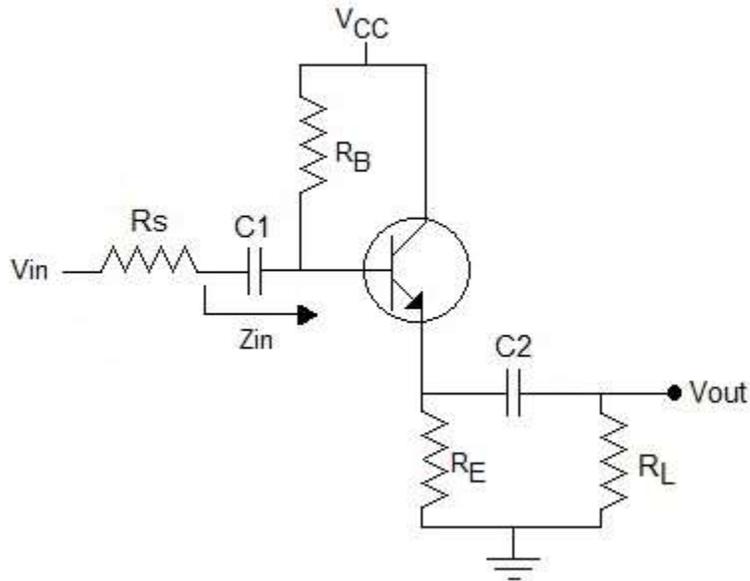
$$A_I = \frac{I_C}{I_{in}}$$

**Formulario para el sustentante del**

Examen General para el Egreso de la Licenciatura en Ingeniería Electrónica (EGEL-IELECTRO)

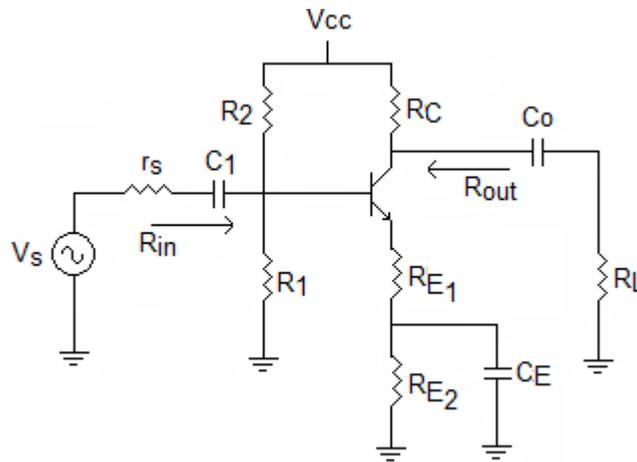
**Dirección del Programa de Evaluación de Egreso (EGEL) Diseño, Ingenierías y Arquitectura**

**Impedancia de entrada de un seguidor de voltaje**



$$Z_{in} = R_{in} = R_B \parallel (R_s + (R_E \parallel R_L)\beta)$$

**Amplificador con compensación para variación de temperatura**

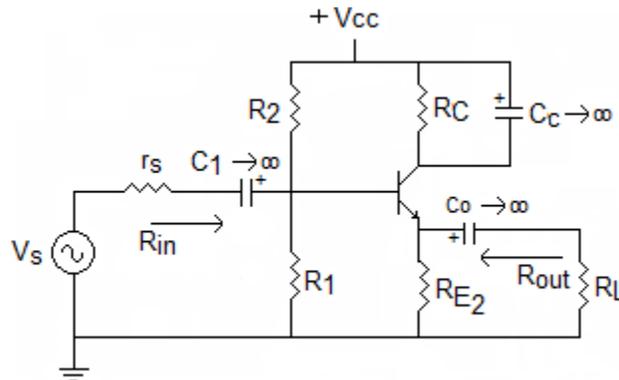


$$A_v \cong \frac{R_C \parallel R_L}{R_{E1}}$$

$$R_{out} = R_C \parallel R_L$$

$$R_{in} = R_1 \parallel R_2 \parallel [(\beta_{ca} + 1) \cdot (r'_e + R_{E1})]$$

### Amplificador colector común



Ecuaciones considerando el modelo T en señal pequeña de primer orden

$$r'_e = \frac{25 \text{ mV}}{I_E}$$

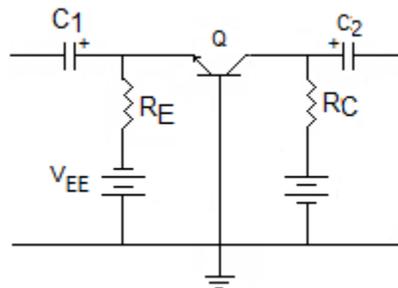
$$R_{in} = R_1 \parallel R_2 \parallel (\beta_{ca} + 1) [r'_e + (R_E \parallel R_L)]$$

$$R_{out} = (R_E \parallel R_L) \parallel [r'_e + R_1 \parallel R_2 \parallel r_{out} \div (\beta_{ca} + 1)]$$

$$A_V = \frac{R_e}{r'_e + R_e} \approx 1$$

$$A_i = \frac{I_e}{I_{in}}$$

### Amplificador en base común



Ecuaciones considerando el modelo T en señal pequeña de primer orden

$$r'_e = \frac{25 \text{ mV}}{I_E}$$

INGENIERIA ELECTRONICA FORMULARIO 2019, EXAMEN CENEVAL ACTUALIZADO  
**Formulario para el sustentante del**  
Examen General para el Egreso de la Licenciatura en Ingeniería Electrónica (EGEL-IELECTRO)  
**Dirección del Programa de Evaluación de Egreso (EGEL) Diseño, Ingenierías y Arquitectura**

$$R_{ent(emisor)} = r'_e$$

$$R_{sal} \cong R_C$$

$$A_v \cong \frac{R_C}{r'_e}$$

$$A_i \cong 1$$

donde:

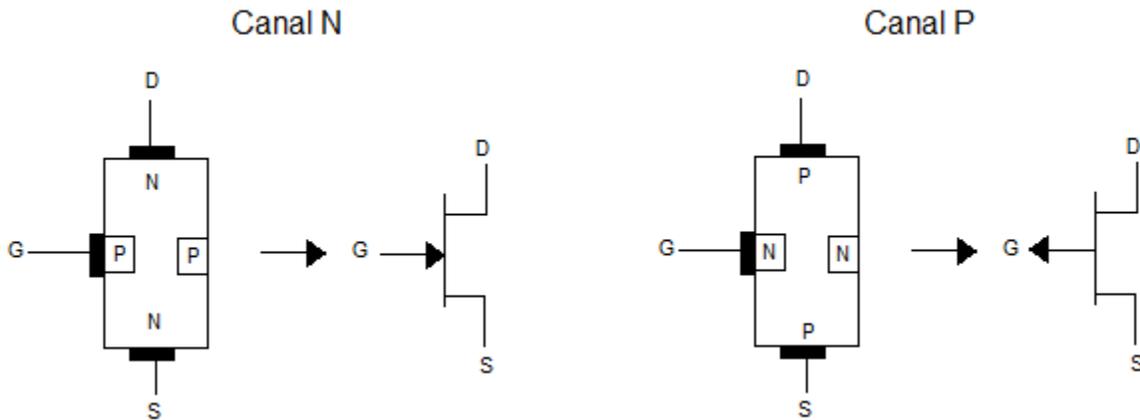
$r'_e$ =Resistencia interna de CA en el emisor

$R_{ent}$ =Resistencia de entrada

$R_{sal}$ =Resistencia de salida

$A_v$ =Ganancia en voltaje

$A_i$ =Ganancia en corriente

**Transistor de efecto de campo (FET)****Parámetros de corriente directa**

Características de transferencia de un JFET

$$I_D = I_{DSS} \left( 1 - \frac{V_{GS}}{V_{GS(corte)}} \right)^2$$

Transconductancia

$$gm = gm_0 \left( 1 - \frac{V_{GS}}{V_{GS(corte)}} \right)^2$$

Transconductancia con  $V_{GS} = 0$ 

$$gm_0 = \frac{2I_{DSS}}{|V_{GS(corte)}|}$$

Característica de transferencia de E – MOSFET

$$I_D = K(V_{GS} - V_{GS(umbral)})^2$$

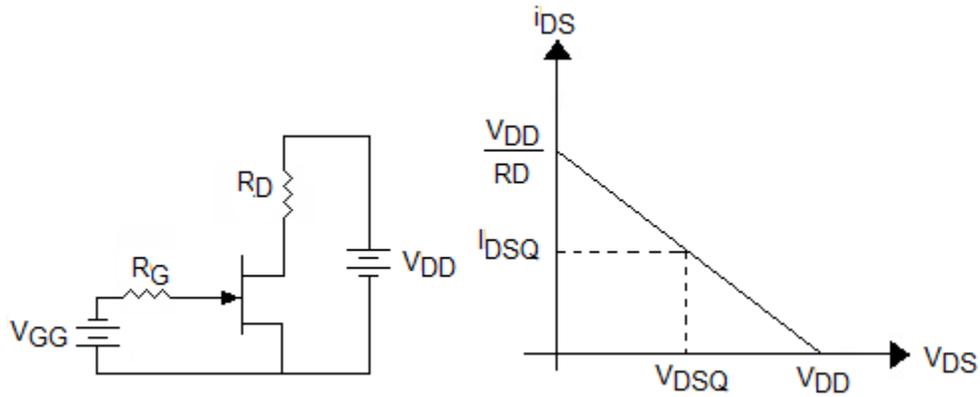
**Formulario para el sustentante del**

Examen General para el Egreso de la Licenciatura en Ingeniería Electrónica (EGEL-IELECTRO)

**Dirección del Programa de Evaluación de Egreso (EGEL) Diseño, Ingenierías y Arquitectura**

**Polarización**

Polarización fija

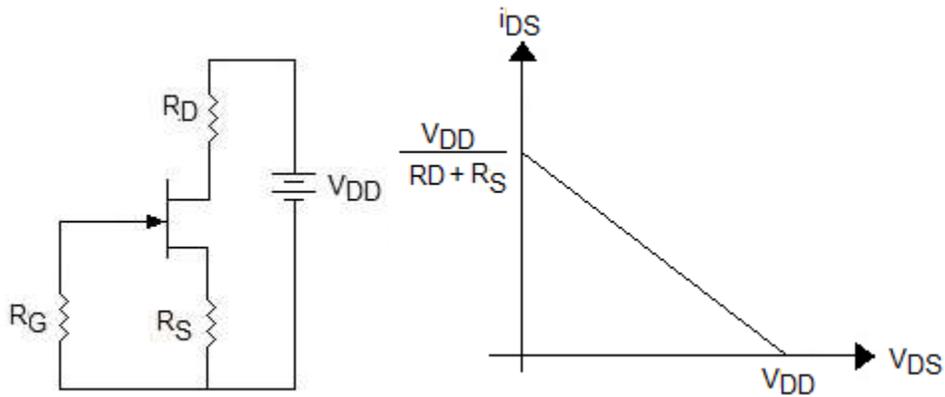


$$V_{GS} = -V_{GG}$$

$$I_{DS} = \frac{V_{DD} - V_{DS}}{R_D}$$

$$V_{DD} = I_{DS} + V_{DS}$$

Autopolarización



$$I_{DS} = -\frac{V_{GS}}{R_S}$$

$$R_S = \left| \frac{V_{GS(OFF)}}{I_{DSS}} \right|$$

$$I_{DS} = I_{DSS} \left( 1 - \frac{V_{GS}}{V_{GS(OFF)}} \right)^2$$

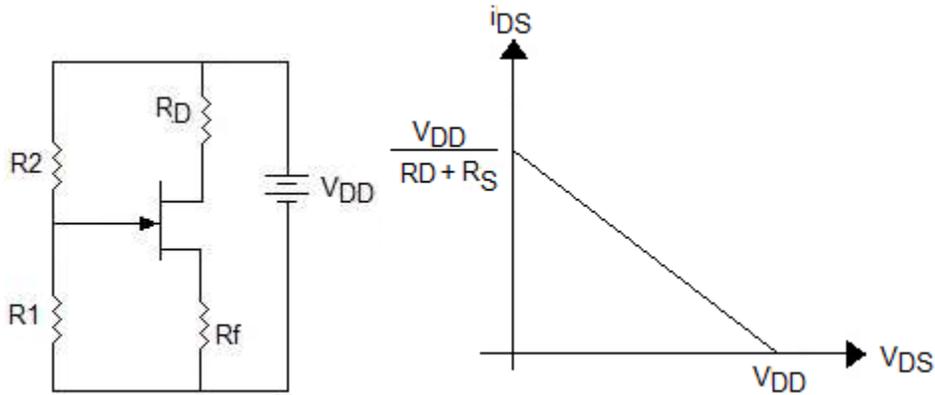
$$I_{DS} = K_1 I_{DSS} \quad |K_1| = 0.382$$

$$V_{GSQ} = 0.382 V_{GS_{off}}$$

$$I_{DS} = \frac{V_{DD} - V_{DS}}{R_D + R_S}$$

$$V_{DD} = I_{DS} (R_D + R_S) + V_{DS}$$

Polarización por divisor de voltaje



$$I_{DS} = \frac{V_{GG} - V_{GS}}{R_S}$$

$$R_G = R_1 \parallel R_2$$

$$V_{GG} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_{DD}$$

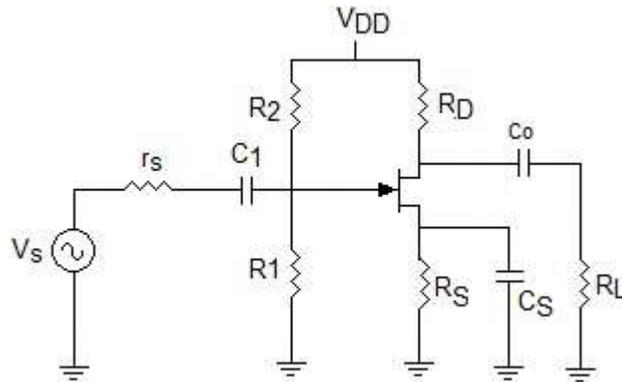
$$I_{DS} = \frac{V_{DD} - V_{DS}}{R_S + R_D}$$

**Formulario para el sustentante del**

Examen General para el Egreso de la Licenciatura en Ingeniería Electrónica (EGEL-IELECTRO)

**Dirección del Programa de Evaluación de Egreso (EGEL) Diseño, Ingenierías y Arquitectura**

Amplificador fuente común



$$R_G = R_1 \parallel R_2$$

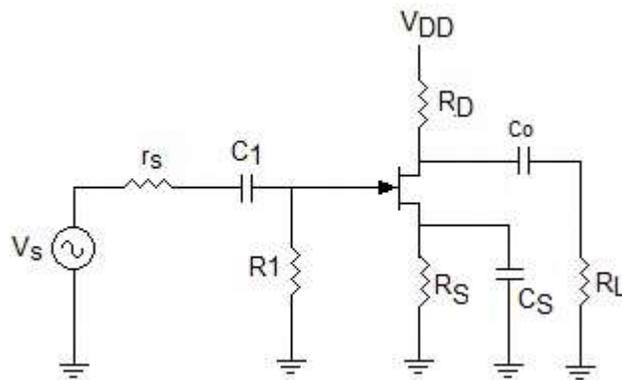
$$R_L = R_D \parallel R_L$$

$$Z_i = R_G$$

$$Z_o = r_{ds} \parallel R_D$$

$$A_V = \frac{V_L}{V_S} = -gm(r_{ds} \parallel R_D \parallel R_L) \frac{R_G}{R_G + r_s}$$

$$A_i = \frac{V_L}{V_S} = -\frac{r_{DS} \parallel R_D}{r_{DS} \parallel R_D + R_L} g_m \cdot R_G$$



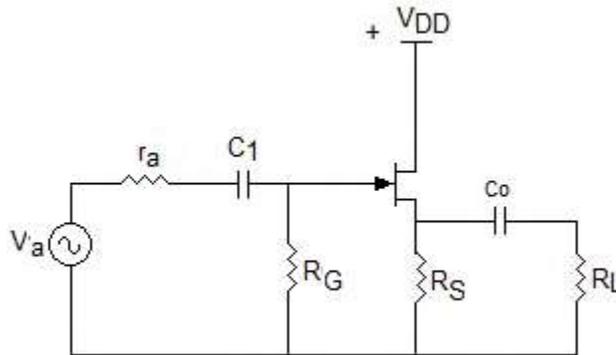
$$I_D = I_{DSS} \left( 1 - \frac{I_D R_S}{V_{GS(CORTE)}} \right)^2$$

$$A_V = gmR_d$$

$$R_{ent} = R_G \parallel \left( \frac{V_{GS}}{I_{GSS}} \right)$$

**Parámetros de corriente alterna (amplificador)**

Amplificador drenaje común



**Característica**

**Drenaje común**

$$Z_i$$

$$R_G$$

$$Z_o$$

$$R_S \parallel \left( \frac{r_{ds}}{\mu + 1} \right)$$

$$A_{V1} = \frac{V_L}{V_{in}}$$

$$\frac{\mu}{\mu + 1} \cdot \frac{R_S \parallel R_L}{R_S \parallel R_L + \frac{r_{ds}}{\mu + 1}}$$

$$A_{i1} = \frac{I_L}{I_{in}}$$

$$A_{V1} = \frac{Z_{in}}{R_L}$$

$$I_D = I_{DSS} \left( 1 - \frac{I_D R_S}{V_{GS(corte)}} \right)^2$$

$$A_V = \frac{gm R_S}{1 + gm R_S}$$

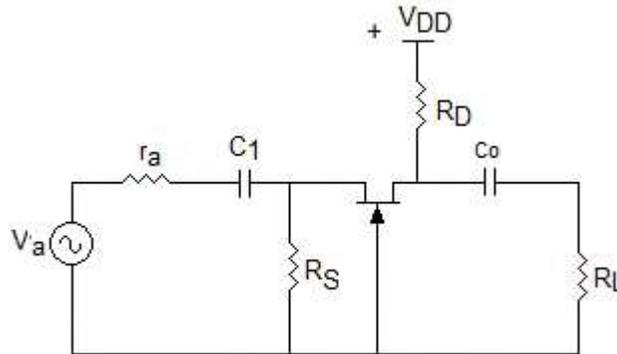
$$R_{ent} = R_G \parallel \left( \frac{V_{GS}}{I_{GSS}} \right)$$

**Formulario para el sustentante del**

Examen General para el Egreso de la Licenciatura en Ingeniería Electrónica (EGEL-IELECTRO)

**Dirección del Programa de Evaluación de Egreso (EGEL) Diseño, Ingenierías y Arquitectura**

Amplificador en compuerta común



**Característica**

**Compuerta común**

$$Z_i$$

$$R_S \parallel \left( \frac{r_{ds} + R_D \parallel R_L}{\mu + 1} \right)$$

$$Z_o$$

$$R_D \parallel [r_{ds} + (\mu + 1)(R_S \parallel r_a)]$$

$$A_{V1} = \frac{V_L}{V_{in}}$$

$$\frac{\mu + 1}{1 + \frac{r_{ds}}{R_D \parallel R_L}} \approx g_m (r_{ds} \parallel R_D \parallel R_L)$$

$$A_{I1} = \frac{I_L}{I_{in}}$$

$$A_{V1} \cdot \frac{Z_{in}}{R_L}$$

$$I_D = I_{DSS} \left( 1 - \frac{I_D R_S}{V_{GS(corte)}} \right)^2$$

$$A_V = g_m R_D$$

$$R_{ent} = \left( \frac{1}{g_m} \right) \parallel R_S$$

donde:

$I_D$ =Corriente a través de un FET autopolarizado

$A_V$ =Ganancia en voltaje

$R_{ent}$ =Resistencia de entrada

$I_{DSS}$ =Corriente en drenaje

$V_{GS}$ =Voltaje en la compuerta

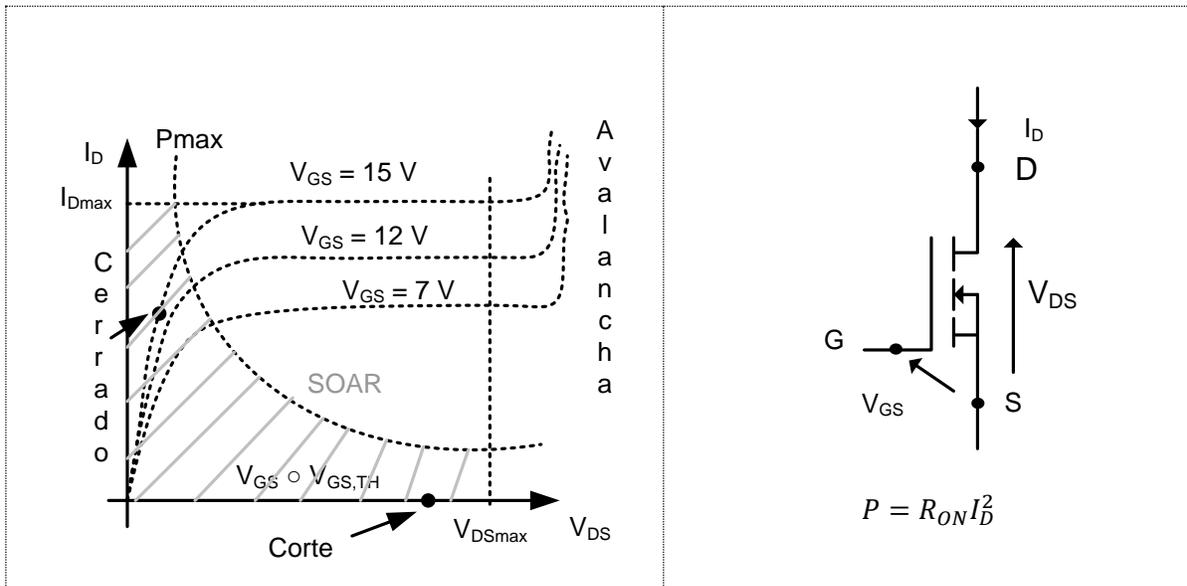
$R_S$ =Resistencia en la fuente

$I_{GSS}$ =Corriente de fuga en inversa

Capacitancia	Compuerta común	Drenaje común
$C_i$	$\frac{1}{2\pi(F_L)(r_a + Z_{in})}$	$\frac{1}{2\pi\left(\frac{F_L}{10}\right)(r_a + Z_{in})}$
$C_o$	$\frac{1}{2\pi\left(\frac{f_L}{10}\right)(r_L + Z_{out})}$	$\frac{1}{2\pi(f_L + Z_o)}$

## Transistor MOSFET

Curva característica



Para un MOSFET de canal inducido tipo n en su región lineal:

$$I_{D(Act)} = K \left[ (V_{GS} - V_T) V_{DS} - \frac{V_{DS}^2}{2} \right]$$

donde:  $K = \frac{b\mu_n\epsilon}{LW}$  en la que  $b$  es el ancho del canal,  $\mu_n$  la movilidad de los electrones,  $\epsilon$  es la permitividad eléctrica de la capa de óxido,  $L$  la longitud del canal y  $W$  el espesor de capa de óxido.

Cuando el transistor opera en la región de saturación, la fórmula pasa a ser la siguiente:

$$I_{D(sat)} = \frac{K+1}{K_0} (V_{GS} - V_T)^2$$

**Amplificadores operacionales****Características**

Razón de rechazo de modo común

$$CMRR = \frac{A_{Vd}}{A_{Vc}}$$

$$CMRR = 20 \log \left( \frac{A_{Vd}}{A_{Vc}} \right)$$

Rapidez de variación de voltaje (slew-rate)

$$SR = \frac{\Delta V_{sal}}{\Delta t}$$

Corriente de polarización de entrada

$$I_{polarización} = \frac{I_1 + I_2}{2}$$

Desequilibrio de corriente de entrada

$$I_{OS} = |I_1 - I_2|$$

Voltaje de error de salida

$$V_{sal(error)} = A_V I_{OS} R_{ent}$$

Frecuencia máxima de operación

$$f_{max} = AB \quad \text{si} \quad AB \leq \frac{SR}{2\pi V_p}$$

$$f_{max} = \frac{SR}{2\pi V_p} \quad \text{si} \quad AB > \frac{SR}{2\pi V_p}$$

**Formulario para el sustentante del**

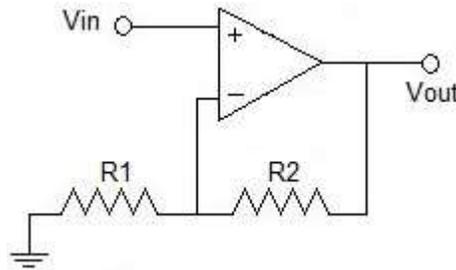
Examen General para el Egreso de la Licenciatura en Ingeniería Electrónica (EGEL-IELECTRO)

**Dirección del Programa de Evaluación de Egreso (EGEL) Diseño, Ingenierías y Arquitectura**

**Configuraciones de amplificadores**

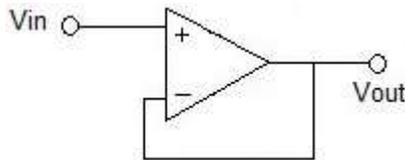
Amplificador no inversor

$$A_v = 1 + \frac{R_2}{R_1}$$



Seguidor de voltaje

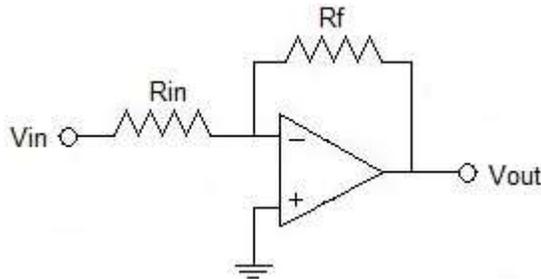
$$A_v = 1$$



Amplificador inversor

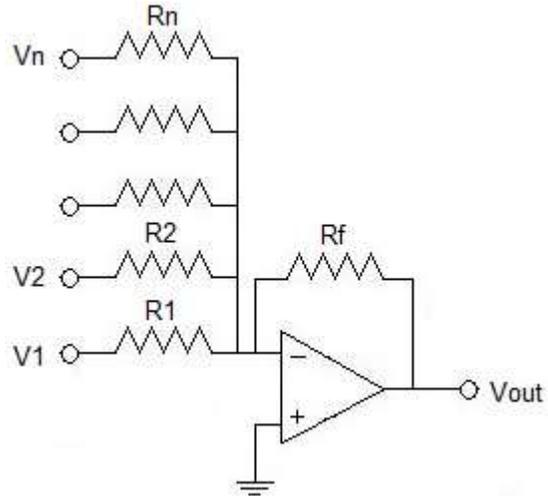
$$A_v = -\frac{R_f}{R_{in}}$$

$$Z_{ent} \cong R_{in}$$



Amplificador sumador inversor con ganancia de n entradas

$$V_{out} = -R_f \left( \frac{V_{in1}}{R_1} + \frac{V_{in2}}{R_2} + \dots + \frac{V_{inn}}{R_n} \right)$$

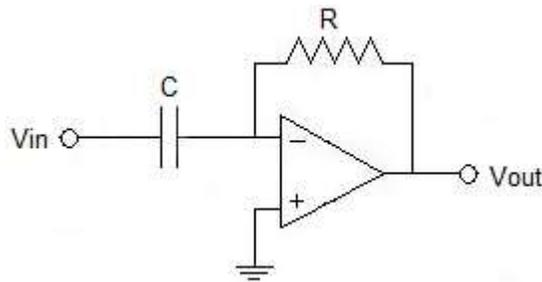


Amplificador restador

$$V_{sal} = \left( 1 + \frac{R_2}{R_1} \right) \left( \frac{R_4}{R_3 + R_4} V_2 - \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_1 \right)$$

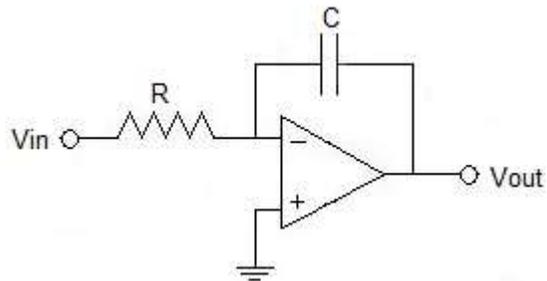
Amplificador derivador

$$V_{out} = -RC \frac{dV_{in}}{dt}$$



Amplificador integrador

$$V_{out} = -\frac{1}{RC} \int V_{in}(t) dt + V_c(0)$$



Amplificador de disparo alto

$$V_{disparo\ alto} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} (+V_{sal\ max})$$

Amplificador de disparo bajo

$$V_{disparo\ bajo} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} (-V_{sal\ max})$$

Amplificador de histéresis

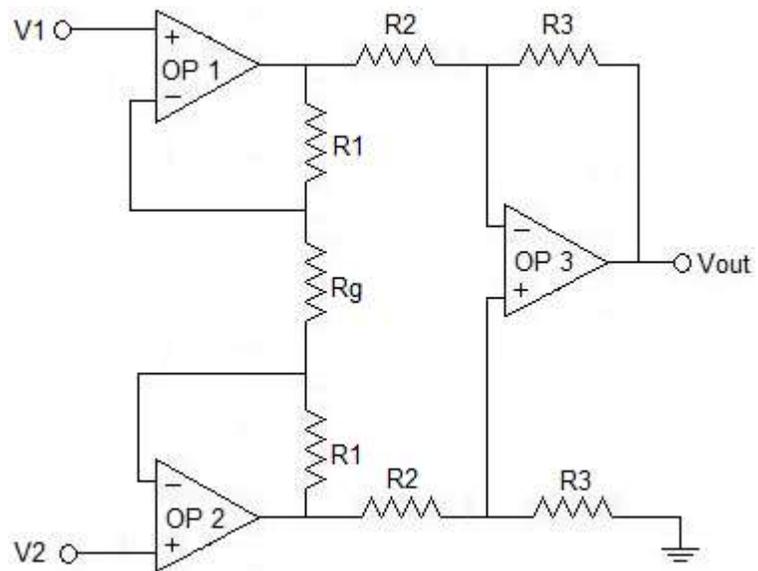
$$V_H = V_{disparo\ alto} - V_{disparo\ bajo}$$

Amplificador de instrumentación

$$I_g = (V_2 - V_1) \left( \frac{1}{R_g} \right)$$

$$V_{intermedio} = (V_2 - V_1) \left( 1 + \frac{2R_1}{R_g} \right)$$

$$V_{out} = (V_2 - V_1) \left( 1 + \frac{2R_1}{R_g} \right) \frac{R_3}{R_2}$$



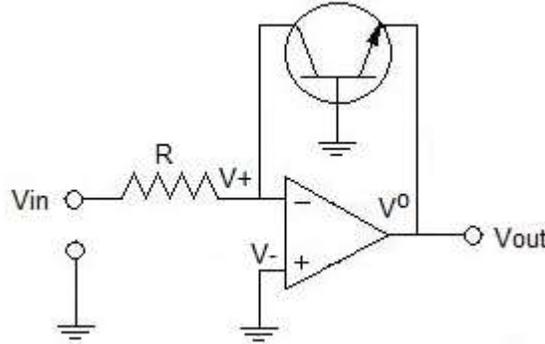
Amplificador de aislamiento

$$A_{v1} = \frac{R_{f1}}{R_{i1}} + 1$$

$$A_{v2} = \frac{R_{f2}}{R_{i1}} + 1$$

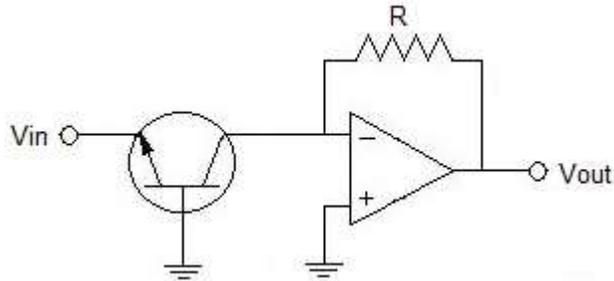
Amplificador logarítmico

$$V_{out} = -(0.025) \ln \left( \frac{V_{in}}{I_{EBO} R} \right)$$



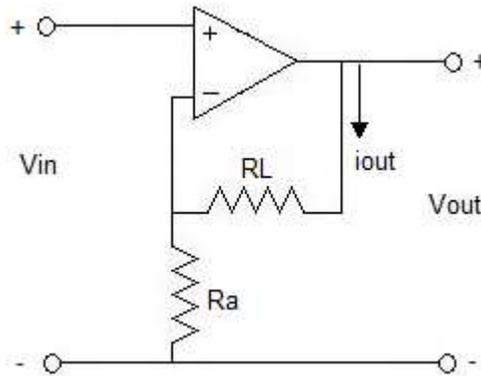
Amplificador anti logarítmico

$$V_{out} = -R I_{EBO} \ln^{-1} \left( \frac{V_{in}}{25mV} \right)$$



Convertidor de voltaje a corriente

$$I_{out} = \frac{V_{in}}{R_a}$$

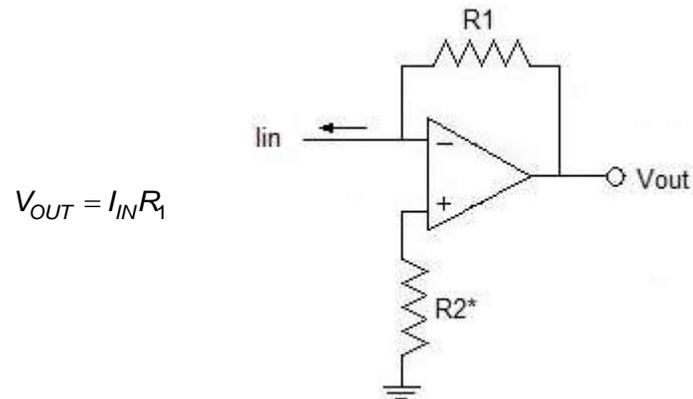


**Formulario para el sustentante del**

Examen General para el Egreso de la Licenciatura en Ingeniería Electrónica (EGEL-IELECTRO)

**Dirección del Programa de Evaluación de Egreso (EGEL) Diseño, Ingenierías y Arquitectura**

Convertidor de corriente a voltaje



Disparador Schmitt

$$R_F = \frac{V_{sat}}{V_{th}} R_1$$

$$R_X = R_1 \parallel R_F$$

**Filtros activos**

Ancho de banda de un filtro pasa bajas

$$AB = f_c$$

Ancho de banda de un filtro pasa banda

$$AB = f_{cs} - f_{ci}$$

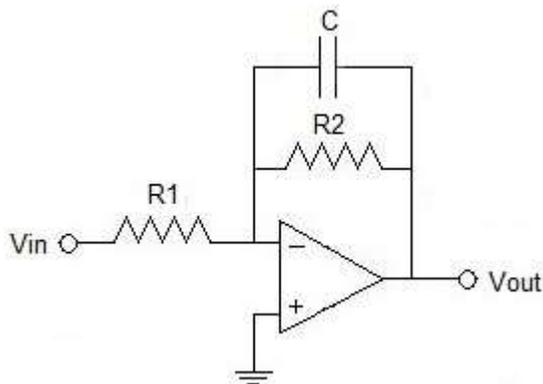
Frecuencia central de un filtro pasa banda

$$f_0 = \sqrt{f_{cs} \cdot f_{ci}}$$

Factor de calidad de un filtro pasa banda

$$Q = \frac{f_0}{AB}$$

Filtro pasa bajas de primer orden



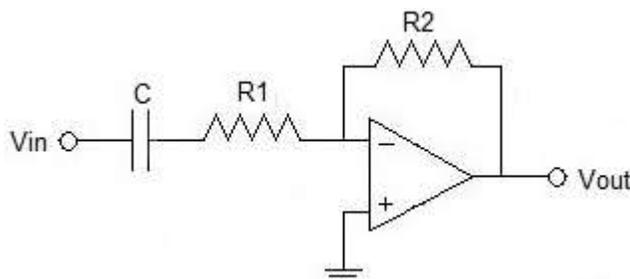
Ganancia en la región de paso

$$H_{0LP} = -\frac{R_2}{R_1}$$

Frecuencia de corte

$$f_c = \frac{1}{2\pi R_2 C}$$

Filtro pasa altas de primer orden



Ganancia en la región de paso

$$H_{0HP} = -\frac{R_2}{R_1}$$

Frecuencia de corte

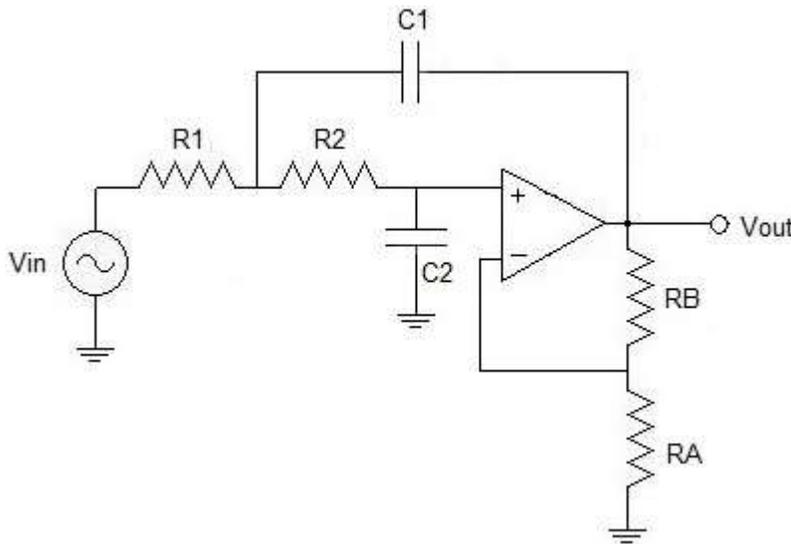
$$f_c = \frac{1}{2\pi R_1 C}$$

**Formulario para el sustentante del**

Examen General para el Egreso de la Licenciatura en Ingeniería Electrónica (EGEL-IELECTRO)

**Dirección del Programa de Evaluación de Egreso (EGEL) Diseño, Ingenierías y Arquitectura**

Filtro pasa bajas Sallen&Key (KRC) de segundo orden



Si  $R_1 = R_2 = R$  y

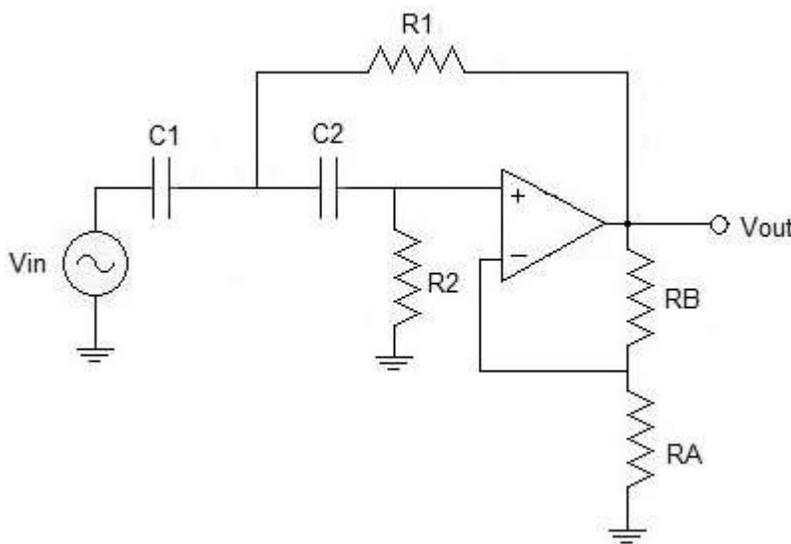
$C_1 = C_2 = C$

$$H_{0LP} = K = 1 + \frac{R_B}{R_A}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{RC}$$

$$Q = \frac{1}{3 - K}$$

Filtro pasa altas Sallen&Key (KRC) de segundo orden



Si  $R_1 = R_2 = R$  y

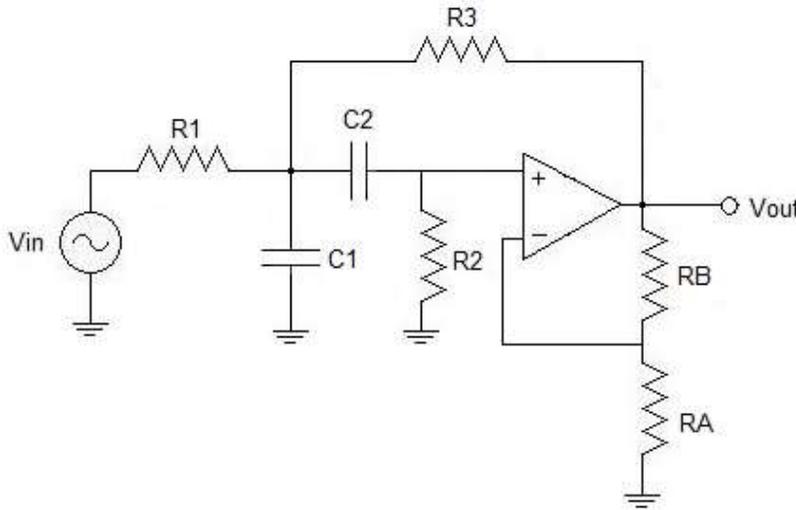
$C_1 = C_2 = C$

$$H_{0HP} = K = 1 + \frac{R_B}{R_A}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{RC}$$

$$Q = \frac{1}{3 - K}$$

Filtro pasa banda Sallen&Key (KRC) de segundo orden



Si  $R_1 = R_2 = R_3 = R$  y

$C_1 = C_2 = C$

$$H_{0BP} = \frac{K}{4 - K}$$

$$\omega_0 = \frac{\sqrt{2}}{RC}$$

$$Q = \frac{\sqrt{2}}{4 - K}$$

Tabla de diseño de filtros activos

Butterworth low-pass filter						
n	f <sub>01</sub>	Q <sub>1</sub>	f <sub>02</sub>	Q <sub>2</sub>	f <sub>03</sub>	Q <sub>3</sub>
2	1	0.707				
3	1	1.000	1			
4	1	0.541	1	1.306		
5	1	0.618	1	1.620	1	

Bessel low-pass filter						
n	f <sub>01</sub>	Q <sub>1</sub>	f <sub>02</sub>	Q <sub>2</sub>	f <sub>03</sub>	Q <sub>3</sub>
2	1.274	0.577				
3	1.453	0.691	1.327			
4	1.419	0.522	1.591	0.806		
5	1.561	0.564	1.760	0.917	1.507	

0.10-dB ripple Chebyshev low-pass filter						
n	f <sub>01</sub>	Q <sub>1</sub>	f <sub>02</sub>	Q <sub>2</sub>	f <sub>03</sub>	Q <sub>3</sub>
2	1.820	0.767				
3	1.200	1.341	0.969			
4	1.153	2.183	0.789	0.619		
5	1.093	3.282	0.797	0.915	0.539	

1.00-dB ripple Chebyshev low-pass filter						
n	f <sub>01</sub>	Q <sub>1</sub>	f <sub>02</sub>	Q <sub>2</sub>	f <sub>03</sub>	Q <sub>3</sub>
2	1.050	0.957				
3	0.997	2.018	0.494			
4	0.993	3.559	0.529	0.785		
5	0.994	5.556	0.655	1.399	0.289	

**Formulario para el sustentante del**

Examen General para el Egreso de la Licenciatura en Ingeniería Electrónica (EGEL-IELECTRO)

**Dirección del Programa de Evaluación de Egreso (EGEL) Diseño, Ingenierías y Arquitectura**

donde:

n = orden del filtro

 $\omega_0 = 2\pi f_c f_{0n}$  para el filtro pasa bajas $\omega_0 = 2\pi f_c / f_{0n}$  para el filtro pasa altas

Filtros Butterworth

La magnitud de la función de transferencia al cuadrado es:

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \omega^{2n}}$$

La función de transferencia para un filtro Butterworth se expresa como:

$$H(s) = \frac{1}{B_n(s)}$$

Los polinomios normalizados para los filtros Butterworth son:

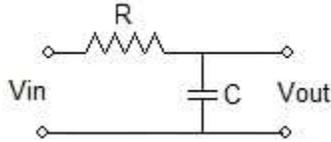
$$B_1(s) = s + 1$$

$$B_2(s) = s^2 + 1.4142s + 1$$

$$B_3(s) = s^3 + 2s^2 + s + 1$$

**Filtros pasivos**

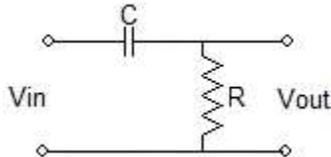
Filtro pasa bajas de primer orden



Frecuencia de corte

$$f_c = \frac{1}{2\pi RC}$$

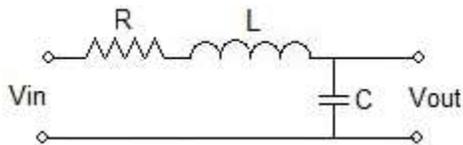
Filtro pasa altas de primer orden



Frecuencia de corte

$$f_c = \frac{1}{2\pi RC}$$

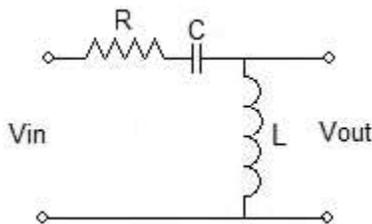
Filtro pasa bajas de segundo orden



$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

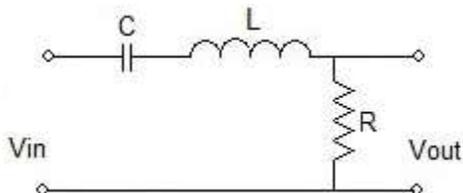
Filtro pasa altas de segundo orden



$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

Filtro pasa banda de segundo orden



$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

**Formulario para el sustentante del**

Examen General para el Egreso de la Licenciatura en Ingeniería Electrónica (EGEL-IELECTRO)

**Dirección del Programa de Evaluación de Egreso (EGEL) Diseño, Ingenierías y Arquitectura****Convertidores****Convertidores de voltaje a frecuencia**

$$f_0 = \frac{V_1}{|V_{ref}| R_{ent} C_{ref}}$$

donde:

 $V_1$  = voltaje de entrada $V_{ref}$  = voltaje de referencia $C_{ref}$  = capacitancia de referencia**Convertidores de frecuencia a voltaje**

$$V_0 = |V_{ref}| R_{int} C_{ref} f_{ent}$$

donde:

 $f_{ent}$  = frecuencia de entrada en Hz $|V_{ref}|$  = voltaje de referencia en V $R_{int}$  = resistencia del integrador interno $C_{ref}$  = capacitancia de referencia**Convertidores digital analógico**

$$I_s = V_{ref} \left( \frac{B_0}{R_0} + \frac{B_1}{R_1} + \frac{B_2}{R_2} + \frac{B_3}{R_3} \right)$$

$$V_0 = -R_F I_F = -R_F V_{ref} \left( \frac{B_0}{R_0} + \frac{B_1}{R_1} + \frac{B_2}{R_2} + \frac{B_3}{R_3} \right)$$

donde:

$$R_0 = \frac{R}{2^0} = R$$

$$R_1 = \frac{R}{2^1} = \frac{R}{2}$$

$$R_2 = \frac{R}{2^2} = \frac{R}{4}$$

$$R_3 = \frac{R}{2^3} = \frac{R}{8}$$

### Convertidor digital analógico con red de escalera R – 2R

$$V_0 = -\frac{V_{ref} R_F}{3R} \left( \frac{B_0}{2^4} \right) \text{ para LSB} = 1 \text{ único}$$

$$V_0 = -\frac{V_{ref} R_F}{3R} \left( \frac{B_3}{2^1} \right) \text{ para MSB} = 1 \text{ único}$$

$$V_0 = -\frac{V_{ref} R_F}{3R} \left( \frac{B_0}{2^4} + \frac{B_1}{2^3} + \frac{B_2}{2^2} + \frac{B_3}{2^1} \right) \text{ cuando el sistema está completamente activado}$$

### Convertidor analógico digital de aproximaciones sucesivas

$$V_{conv} = \text{sgn}(V_a - V_b) = \begin{cases} 1 & \text{para } V_a > V_b \\ 0 & \text{para } V_a < V_b \end{cases}$$

Proceso de aproximaciones sucesivas

Paso	$V_b$	$B_3$	$B_2$	$B_1$	$B_0$	Comparaciones	Respuesta
1	8 V	1	0	0	0	¿Es $V_a > 8$ V?	Sí
2	12 V	1	1	0	0	¿Es $V_a > 12$ V?	No
3	10 V	1	0	1	0	¿Es $V_a > 10$ V?	Sí
4	11 V	1	0	1	1	¿Es $V_a > 11$ V?	No
	10 V	1	0	1	0	Leer salida	

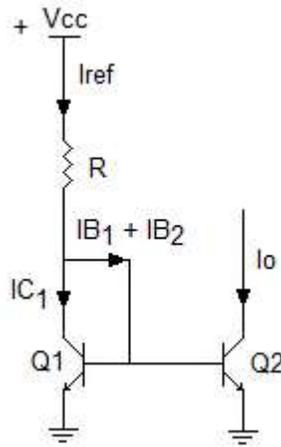
**Formulario para el sustentante del**

Examen General para el Egreso de la Licenciatura en Ingeniería Electrónica (EGEL-IELECTRO)

**Dirección del Programa de Evaluación de Egreso (EGEL) Diseño, Ingenierías y Arquitectura**

**Amplificadores de corriente**

**Fuente de corriente con BJT**



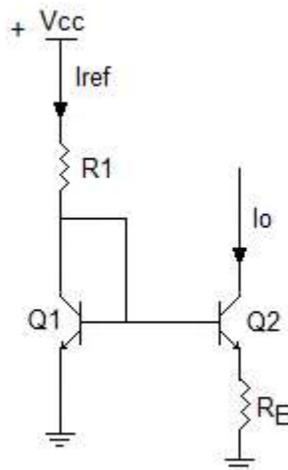
$$V_{BE1} = V_{BE2} = V_{CE1} = 0.7 \text{ V}$$

La corriente en el colector

$$I_{C1} = I_{C2} = \frac{I_R}{1 + \frac{2}{\beta_F}}$$

$$R_1 = \frac{V_{CC} - V_{BE1}}{I_R}$$

**Fuente de corriente Widlar**



La suma de las tensiones en la base de los transistores

$$V_{BE_1} - V_{BE_2} - I_{C_2} R_E = 0$$

Para el análisis de esta fuente de corriente es preciso utilizar la ecuación de Ebers-Moll simplificada de un transistor en la región lineal que relaciona la  $I_C$  con la tensión  $V_{BE}$ :

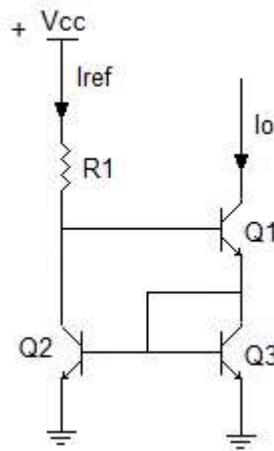
$$V_T \ln \frac{I_{C_1}}{I_S} = I_S R_E$$

donde:  $I_{C_1} = \frac{V_{CC} - V_{BE}}{R_1}$

La resistencia de salida de esta fuente es:

$$Z_O = h_{oe2}^{-1} \left( 1 + \frac{\beta_F R_E}{h_{ie2} + R_E} \right)$$

### Fuente de corriente Wilson



$$I_{E2} = (1 + \beta_F) I_{B2}$$

Si los transistores son idénticos

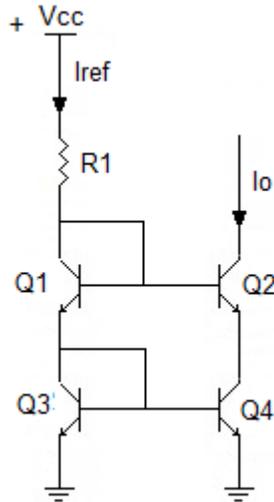
$$I_{E2} = I_{C3} + I_{B3} + I_{B1} = \left( 1 + \frac{1}{\beta_F} \right) + \frac{I_{C1}}{\beta_F}$$

$$I_{OUT} = \frac{V_{CC} - 2V_{BE}}{R_1}$$

Resistencia de salida

$$Z_{out} = \frac{h_{fe} h_{oe}^{-1}}{2}$$

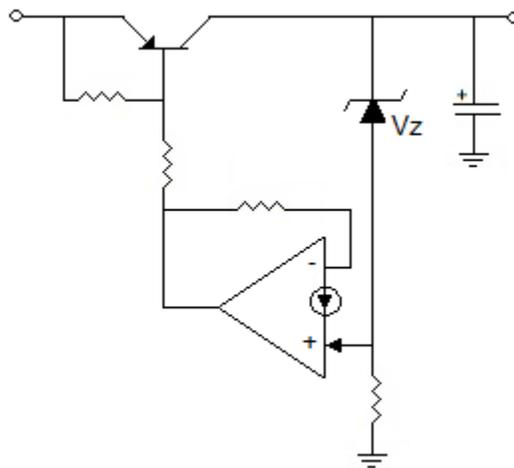
**Fuente de corriente Cascode**



$$I_{out} = \frac{V_{CC} - 2V_{BE}}{R_1}$$

$$Z_{out} = h_{fe} \cdot h_{oe}^{-1}$$

**Fuentes de corriente controlada con voltaje**



Si  $R_2 = R_4$

$$I_S = \frac{R_2 V_e}{R_S R_1}$$

Para que el operacional esté en equilibrio se debe de cumplir que:

$$\frac{V^+}{R_4} = \frac{V_e}{R_1} + \frac{V^+ - R_S I_S}{R_2}$$

Para la polarización del transistor

$$V_2 = V^+ - R_S I_S$$

## Electrónica digital

### Algebra de Boole

a) Propiedad conmutativa:

$$\begin{aligned}a + b + c + d &= d + c + b + a \\ a \cdot b \cdot c \cdot d &= d \cdot c \cdot b \cdot a \\ d \cdot c \cdot b \cdot a + d \cdot c \cdot a + b \cdot c &= d \cdot c \cdot a + c \cdot b + d \cdot a \cdot c \cdot b\end{aligned}$$

b) Propiedad asociativa:

$$\begin{aligned}a + b + c + d &= (a + b) + (c + d) \\ d \cdot c \cdot b \cdot a &= (d \cdot c) \cdot (b \cdot a)\end{aligned}$$

c) Propiedad distributiva:

$$\begin{aligned}a \cdot (b + c) &= a \cdot b + a \cdot c \\ a + (b \cdot c) &= (a + b) \cdot (a + c)\end{aligned}$$

d) Propiedad de identidad de elementos neutros 0 y 1:

$$\begin{aligned}0 + a &= a \\ 1 \cdot a &= a\end{aligned}$$

e) Leyes del algebra de Boole:

$$\begin{aligned}a + 0 &= a & a \cdot 0 &= 0 \\ a + 1 &= 1 & a \cdot 1 &= a \\ a + a &= a & a \cdot a &= a \\ a + a' &= 1 & a \cdot a' &= 0\end{aligned}$$

f) Suma y resta binaria:

$$\begin{aligned}0 + 0 &= 0 & 0 - 0 &= 0 \\ 0 + 1 &= 1 & 0 - 1 &= 1 \\ 1 + 0 &= 1 & 1 - 0 &= 1 \\ 1 + 1 &= 10 & 1 - 1 &= 0\end{aligned}$$

g) Teorema de Shanon: Cualquier expresión booleana negada es equivalente a la misma expresión en la que todas las variables son negadas y se sustituyen las operaciones (+) por (·) y viceversa:

$$((a + b) \cdot c)' = (a \cdot b)' + c'$$

- h) Primer teorema de De Morgan: El complemento de un producto de variables es igual a la suma de los complementos de las variables:

$$(a \cdot b)' = a' + b'$$

- i) Segundo teorema de De Morgan: El complemento de una suma de variables es igual al producto de los complementos de las variables:

$$(a + b)' = a' \cdot b'$$

### Mapa de Karnaugh

Reglas para simplificar una función mediante mapas de Karnaugh

- Determinar el número de variables involucradas  
Ejemplo: A y B
- Realizar un mapa que cumpla con la relación  $2^N$ . Donde N representa el número de variables y  $2^N$  el número de combinaciones posibles

Ejemplo: Si N es igual a 2 entonces  $2^2 = 4$  combinaciones posibles

A	B	SALIDA
0	0	
0	1	
1	0	
1	1	

- Debe de existir un cuadro para cada combinación de entrada.

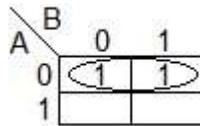
		B	
		0	1
A	0		
	1		

- Introducir el valor lógico de cada minitérmino en su cuadro correspondiente.

Ejemplo:  $F(A,B) = \sum m(0,1)$ .

		B	
		0	1
A	0	1	1
	1		

- Buscar encerrar  $2^N$  cuadros adyacentes. Hacer encierros de 1,2,4,8, etc.



Determinar la función de salida correspondiente:

Ejemplo: Salida =  $\neg B$

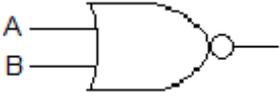
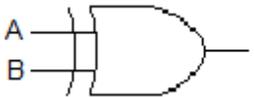
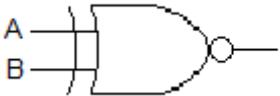
- Aspectos a considerar
  - a) Tratar de hacer el máximo encierro posible
  - b) Buscar que no exista redundancia en los encierros seleccionados

### Conversión de decimal a BCD natural, BCD Aiken y BCD exceso 3

Decimal	BCD natural	BCD Aiken	BCD exceso 3
	8 4 2 1	2 4 2 1	
0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 1 1
1	0 0 0 1	0 0 0 1	0 1 0 0
2	0 0 1 0	0 0 1 0	0 1 0 1
3	0 0 1 1	0 0 1 1	0 1 1 0
4	0 1 0 0	0 1 0 0	0 1 1 1
5	0 1 0 1	1 0 1 1	1 0 0 0
6	0 1 1 0	1 1 0 0	1 0 0 1
7	0 1 1 1	1 1 0 1	1 0 1 0
8	1 0 0 0	1 1 1 0	1 0 1 1
9	1 0 0 1	1 1 1 1	1 1 0 0

### Circuitos digitales básicos

Compuerta	Función	Tabla de verdad	Símbolo															
OR	$f = A + B$	<table border="1"> <thead> <tr> <th>B</th> <th>A</th> <th>f</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr> </tbody> </table>	B	A	f	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	
B	A	f																
0	0	0																
0	1	1																
1	0	1																
1	1	1																
AND	$f = A \cdot B$	<table border="1"> <thead> <tr> <th>B</th> <th>A</th> <th>f</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr> <tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr> </tbody> </table>	B	A	f	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	1	1	
B	A	f																
0	0	0																
0	1	0																
1	0	0																
1	1	1																
NOT	$f = \overline{A}$	<table border="1"> <thead> <tr> <th>A</th> <th>f</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>0</td><td>1</td></tr> <tr><td>1</td><td>0</td></tr> </tbody> </table>	A	f	0	1	1	0										
A	f																	
0	1																	
1	0																	

NOR	$f = \overline{A+B}$	<table border="1"> <thead> <tr> <th>B</th> <th>A</th> <th>f</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0</td> <td>0</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>1</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>0</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>1</td> <td>0</td> </tr> </tbody> </table>	B	A	f	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1	1	0	
B	A	f																
0	0	1																
0	1	0																
1	0	0																
1	1	0																
NAND	$f = \overline{A \cdot B}$	<table border="1"> <thead> <tr> <th>B</th> <th>A</th> <th>f</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0</td> <td>0</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>1</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>0</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>1</td> <td>0</td> </tr> </tbody> </table>	B	A	f	0	0	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	
B	A	f																
0	0	1																
0	1	1																
1	0	1																
1	1	0																
XOR	$f = A \oplus B$	<table border="1"> <thead> <tr> <th>B</th> <th>A</th> <th>f</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>1</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>0</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>1</td> <td>0</td> </tr> </tbody> </table>	B	A	f	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	0	
B	A	f																
0	0	0																
0	1	1																
1	0	1																
1	1	0																
XNOR	$f = A \otimes B$	<table border="1"> <thead> <tr> <th>B</th> <th>A</th> <th>f</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0</td> <td>0</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>1</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>0</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>1</td> <td>1</td> </tr> </tbody> </table>	B	A	f	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1	1	1	
B	A	f																
0	0	1																
0	1	0																
1	0	0																
1	1	1																

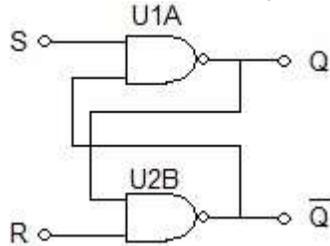
**Formulario para el sustentante del**

Examen General para el Egreso de la Licenciatura en Ingeniería Electrónica (EGEL-IELECTRO)

**Dirección del Programa de Evaluación de Egreso (EGEL) Diseño, Ingenierías y Arquitectura**

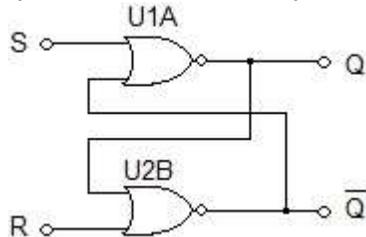
**Flip-flops**

Flip-flop SR básico con compuerta NAND



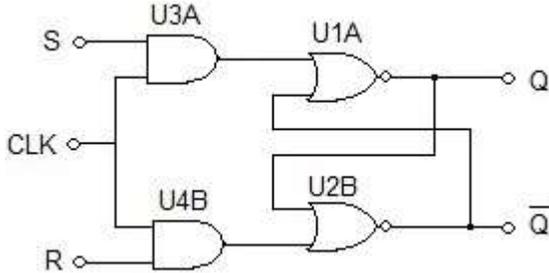
S	R	Q(t+1)	$\bar{Q}(t+1)$
0	0	inválido	inválido
0	1	1	0
1	0	0	1
1	1	Q(t)	$\bar{Q}(t)$

Flip-flop SR básico con compuerta NOR



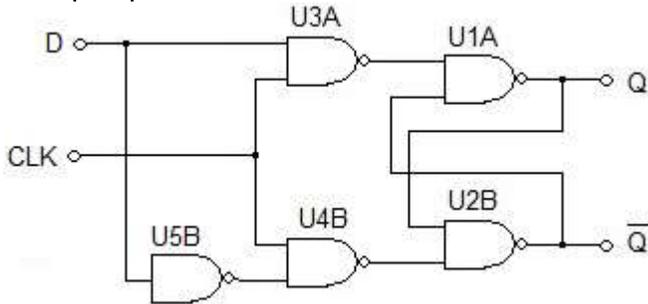
S	R	Q(t+1)	$\bar{Q}(t+1)$
0	0	Q(t)	$\bar{Q}(t)$
0	1	0	1
1	0	1	0
1	1	inválido	inválido

Flip-flop SR Temporizado



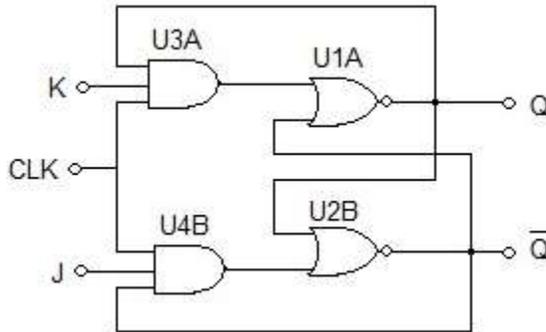
Q	S	R	Q(t+1)	$\bar{Q}(t+1)$
0	0	0	0	1
0	0	1	0	1
0	1	0	1	0
0	1	1	indeterminado	indeterminado
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	1	0
1	1	1	indeterminado	indeterminado

Flip-flop D



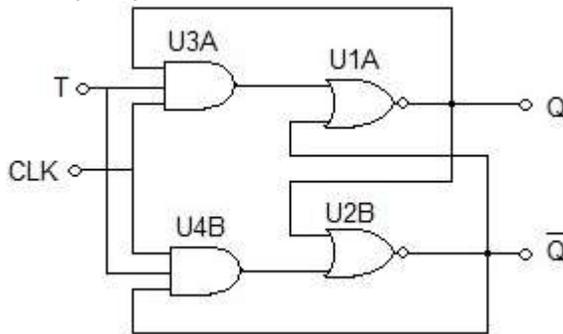
Q	D	Q(t+1)	$\bar{Q}(t+1)$
0	0	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	1	1	0

Flip-flop JK



Q	J	K	Q(t+1)	$\bar{Q}(t+1)$
0	0	0	0	1
0	0	1	0	1
0	1	0	1	0
0	1	1	1	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	1	0
1	1	1	0	1

Flip-flop T



Q	T	Q(t+1)	$\bar{Q}(t+1)$
0	0	0	1
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

## Electrónica de potencia

### Fórmulas básicas

#### Eficiencia

$$\eta = \frac{P_{CD}}{P_{CA}}$$

#### Valor efectivo CA

$$V_{CA} = \sqrt{V_{rms}^2 - V_{CD}^2}$$

#### El factor de utilización del transformador

$$TUF = \frac{P_{CD}}{V_s I_s}$$

donde:

$V_s$  = Voltaje rms en el secundario del transformador [V]

$I_s$  = Corriente rms en el secundario del transformador [A]

#### Distorsión armónica total THD

$$THD = \left( \frac{I_s^2 - I_{S1}^2}{I_{S1}^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

#### Rectificador monofásico de onda completa

$$V_{CD} = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} V_m \text{sen} \omega t dt = \frac{2V_m}{\pi}$$

donde:

$V_m$  = Voltaje máximo inverso [V]

Corriente promedio de carga es

$$I_{CD} = \frac{V_{CD}}{R}$$

Corriente rms de salida

$$I_{rms} = \frac{V_{rms}}{R}$$

Voltaje rmsgsalida

$$V_{rms} = \left[ \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} V_m^2 \text{sen}^2 \omega t dt \right]^{\frac{1}{2}} = \frac{V_m}{\sqrt{2}}$$

**Rectificador trifásico en puente**

$$V_{CD} = \frac{2}{2\pi/6} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{3} V_m \cos \omega t dt = \frac{3\sqrt{3}}{\pi} V_m$$

donde:

$V_m$  = Voltaje máximo [V]

El voltaje rms de salida es:

$$V_{cd} = \left[ \frac{2}{2\pi/6} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{3} V_m^2 \cos^2 \omega t dt \right]^{\frac{1}{2}} = \left( \frac{3}{2} + \frac{9\sqrt{3}}{4\pi} \right)^{\frac{1}{2}} V_m$$

## Dispositivos

### Ecuación del Diodo Shockley

$$I_D = I_S \left( e^{\frac{V_D}{nV_T}} - 1 \right)$$

donde:

$I_D$ =Corriente a través del diodo [A]

$V_D$ =Voltaje de polarización directo [V]

$I_S$ =Corriente de fuga [A]

$n$  =Constante para Ge = 1 y para Si = 1.1 y 1.8

$$V_T = \frac{kT}{q} \approx 25.8 \text{ mV}$$

donde:

$V_T$ =Voltaje térmico

$Q$ =Carga del electrón ( $1.6022 \times 10^{-19}$ ) [C]

$T$ = Temperatura absoluta [K]

$K$ =Constante de Boltzman  $1.3806 \times 10^{-23}$  [J/K]

Tiempo total de recuperación inversa ( $t_{rr}$ )

$$t_{rr} = t_a + t_b$$

donde:

$t_a$ =Tiempo de almacenamiento de carga en la región de agotamiento[s]

$t_b$ =Tiempo de almacenamiento de carga en el cuerpo del semiconductor [s]

Corriente inversa pico ( $I_{RR}$ )

$$I_{RR} = t_a \frac{d_i}{d_t} = \sqrt{2Q_{RR} \frac{d_i}{d_t}}$$

donde:

$Q_{RR}$  = carga de recuperación inversa [C]

Rectificadores monofásicos de media onda

Potencia de salida en CD

$$P_{CD} = V_{CD} I_{CD}$$

Potencia de salida en CA

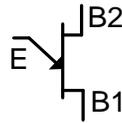
$$P_{CA} = V_{rms} I_{rms}$$

**Formulario para el sustentante del**

Examen General para el Egreso de la Licenciatura en Ingeniería Electrónica (EGEL-IELECTRO)

**Dirección del Programa de Evaluación de Egreso (EGEL) Diseño, Ingenierías y Arquitectura**

**UJT**



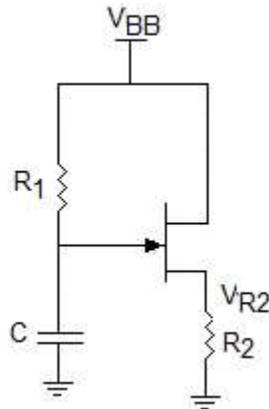
El disparo ocurre entre el emisor y la base1 y el voltaje al que ocurre este disparo está dado por la fórmula:

$$V_p = 0.7 + nV_{B_2B_1}$$

donde:

$n$  = intrinsic standoff ratio (dato del fabricante)

$V_{B_2B_1}$  = Voltaje entre las dos bases

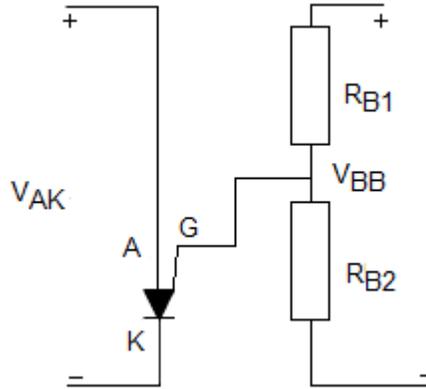


Condición para encendido y apagado

$$\frac{V_{BB} - V_P}{I_P} > R_1 > \frac{V_{BB} - V_V}{I_V}$$

**PUT**

Este transistor se polariza de la siguiente manera:



Cuando  $I_G = 0$

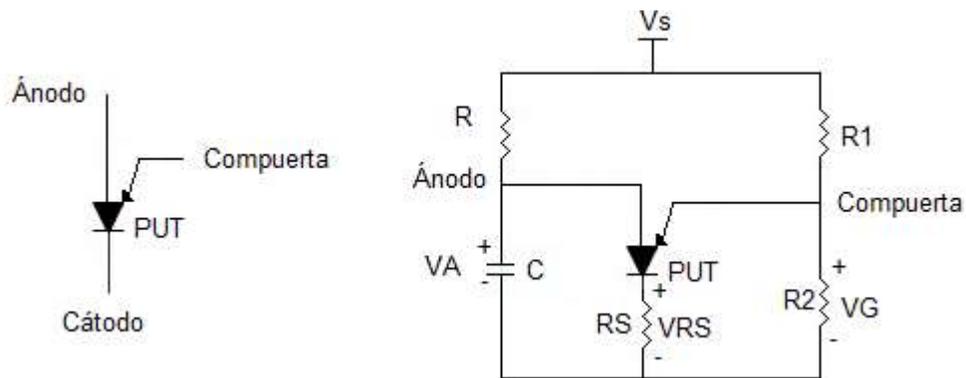
$$V_G = V_{BB} \left[ \frac{R_{B2}}{R_{B1} + R_{B2}} \right]$$

$$V_G = n V_{BB}$$

donde:  $n = R_{B2} / (R_{B1} + R_{B2})$

El periodo de oscilación T está dado en forma aproximada por:

$$T = \frac{1}{f} = RC \ln \left( \frac{V_s}{V_s - V_p} \right) = RC \ln \left( 1 + \frac{R_2}{R_1} \right)$$



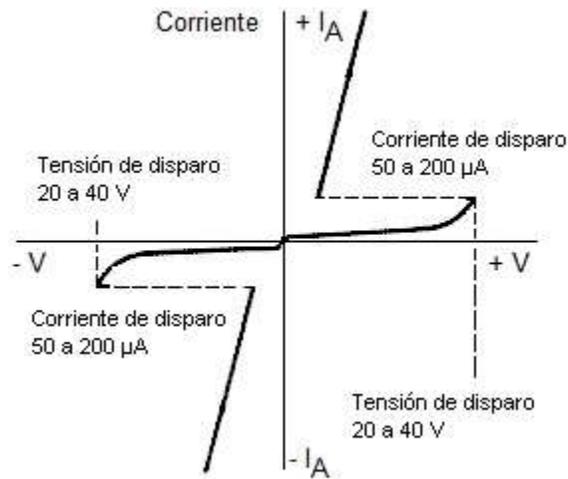
Circuito de disparo para un PUT

**Formulario para el sustentante del**

Examen General para el Egreso de la Licenciatura en Ingeniería Electrónica (EGEL-IELECTRO)

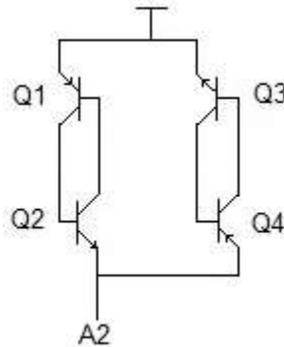
**Dirección del Programa de Evaluación de Egreso (EGEL) Diseño, Ingenierías y Arquitectura**

**DIAC**



Si (+V) o (- V) es menor que la tensión de disparo, el DIAC se comporta como un circuito abierto.

Si (+V) o (- V) es mayor que la tensión de disparo, el DIAC se comporta como un cortocircuito.



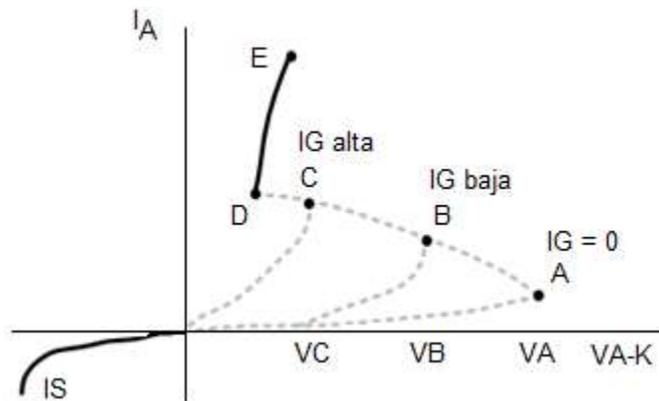
Circuito equivalente del DIAC

**SCR**

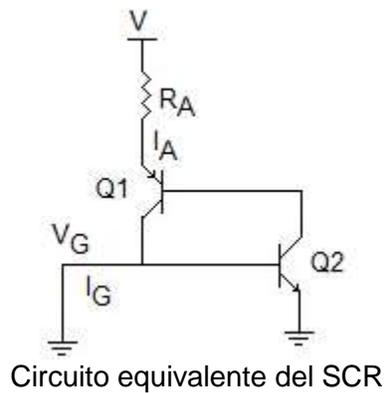
Cuando el SCR está polarizado en inversa se comporta como un diodo común (ver la corriente de fuga  $I_s$ ).

En la región de polarización en directo el SCR se comporta también como un diodo común, siempre que el SCR ya haya sido activado (On). Ver los puntos D y E.

Para valores altos de corriente de compuerta ( $I_G$ ) (ver punto C), el voltaje de ánodo a cátodo es menor (VC).



Si la  $I_G$  disminuye, el voltaje ánodo-cátodo aumenta. (ver el punto B y A, y el voltaje ánodo-cátodo  $V_B$  y  $V_A$ ).

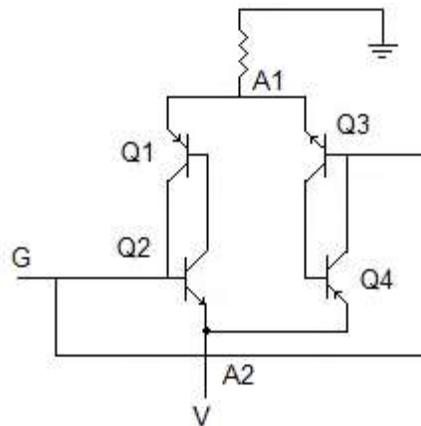
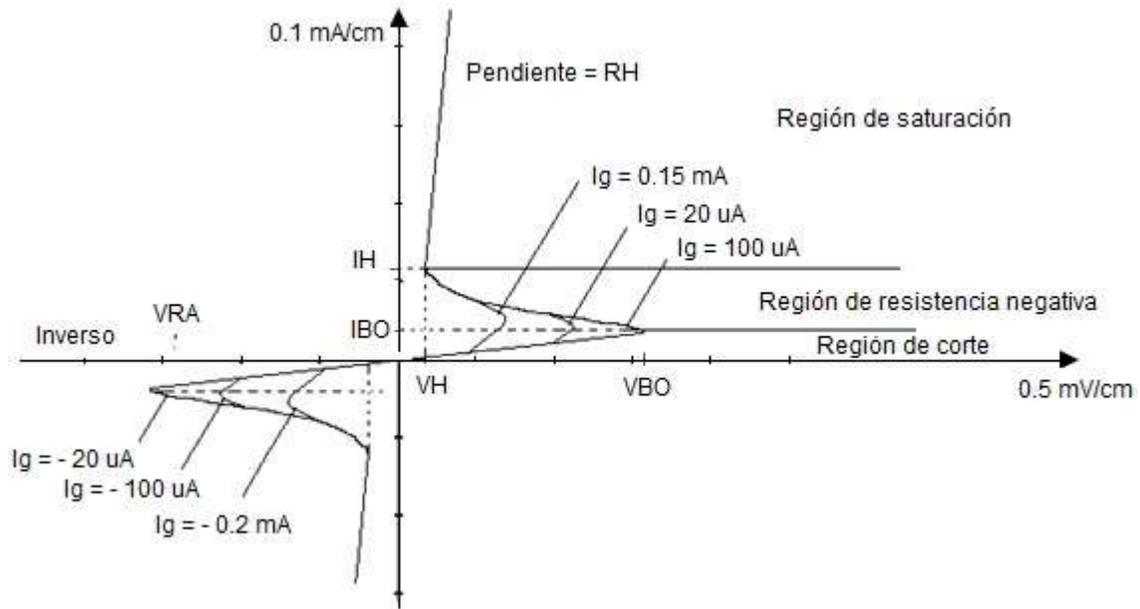


**Formulario para el sustentante del**

Examen General para el Egreso de la Licenciatura en Ingeniería Electrónica (EGEL-IELECTRO)

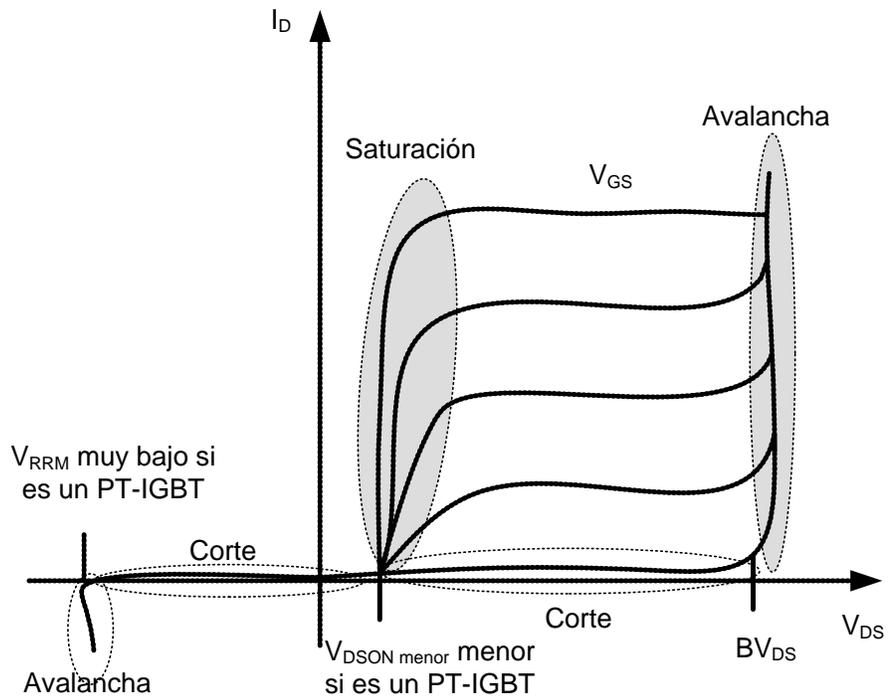
**Dirección del Programa de Evaluación de Egreso (EGEL) Diseño, Ingenierías y Arquitectura**

**TRIAC**



Circuito equivalente al TRIAC

**IGBT**

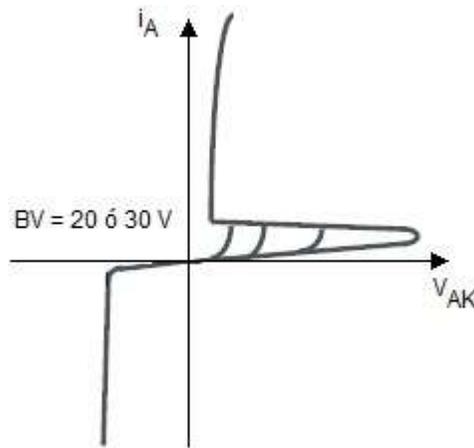


**Formulario para el sustentante del**

Examen General para el Egreso de la Licenciatura en Ingeniería Electrónica (EGEL-IELECTRO)

**Dirección del Programa de Evaluación de Egreso (EGEL) Diseño, Ingenierías y Arquitectura****GTO**

Característica estática



Al cebarlo por corriente entrante de puerta, tenemos exactamente el mismo proceso que en el SCR normal.

Para bloquearlo, será necesario sacar los transistores de saturación aplicando una corriente de puerta negativa:

$$\text{luego } I_G^- > \frac{I_A}{\beta_{off}}$$

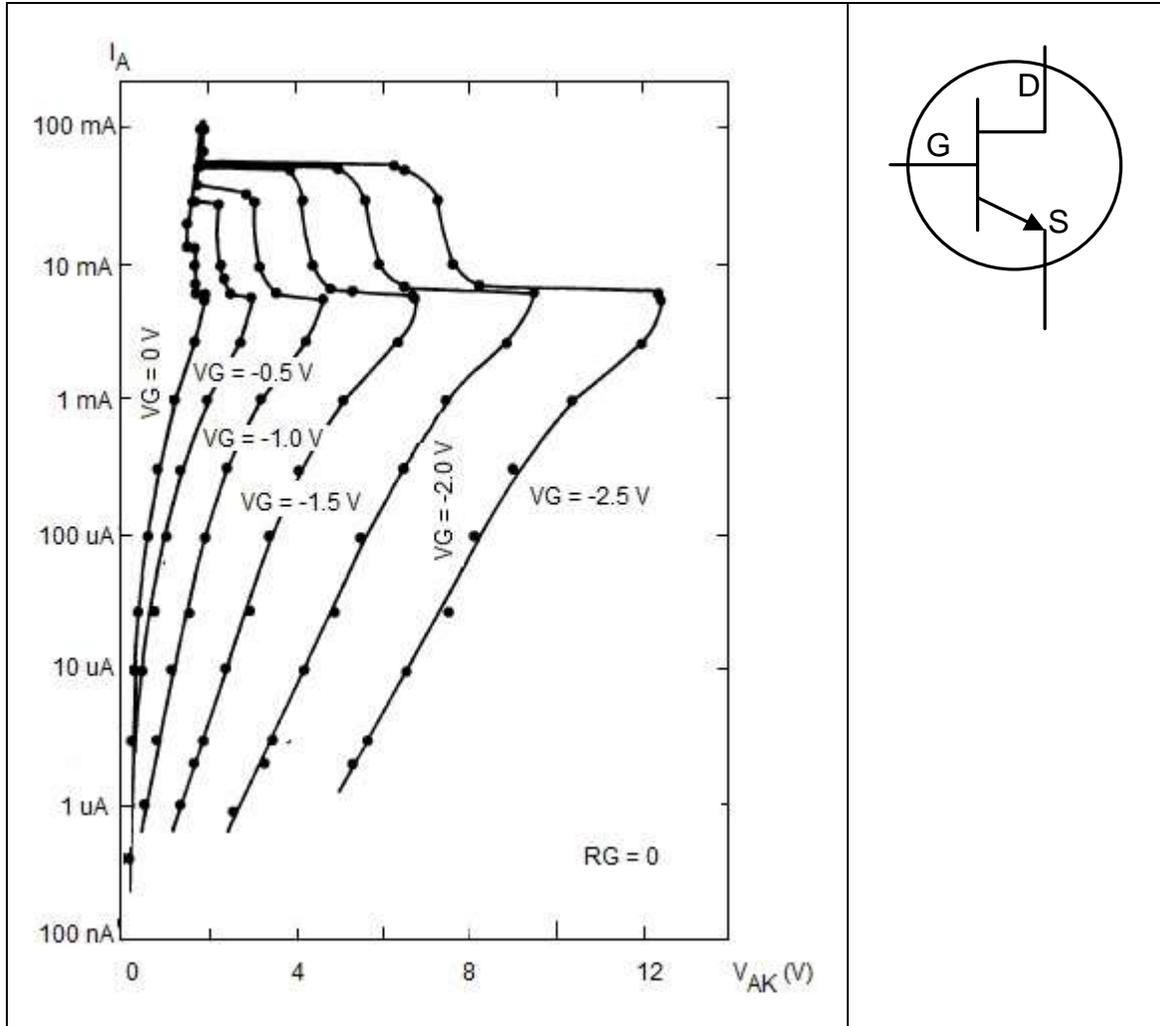
donde  $\beta_{off}$  es la ganancia de corriente en el momento del corte y vendrá expresada por:

$$\beta_{off} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2 - 1}$$

Para conseguir cortar el GTO, con una corriente soportable por la puerta, debe ser  $\beta_{off}$  mayor posible, para ello debe ser:  $\alpha_2 \approx 1$  (lo mayor posible) y  $\alpha_1 \approx 0$  (lo menor posible).

**SIT**

Curva característica



Nota: A=D y K=S

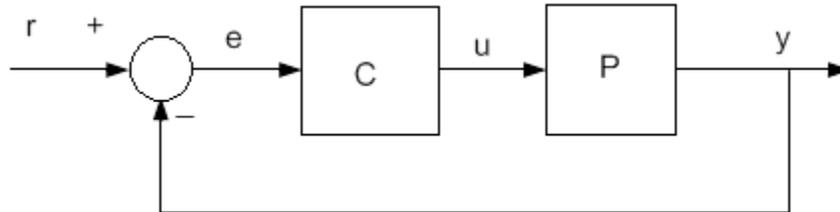
$$-I_G = \frac{\beta}{1+\beta} I_A + I_{CBO}$$

$$-I_G = \frac{I_A}{1+gmR_G}$$

$$I_A = \frac{I_{CBO}(1+gmR_G)}{1+\frac{\beta}{1+\beta}(1+gmR_G)}$$

## Teoría de control

### Terminología de la ingeniería de control



donde:

r = señal de referencia o set point  
 e = señal de error ( $e=r -y$ )  
 u = acción de control (variable manipulada)  
 y= señal de salida (variable controlada)  
 C = controlador  
 P= Proceso

### Modelos de control

Los modelos clásicos de control clásico comprenden ecuaciones diferenciales de orden n.

$$a_0 \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-2} \frac{dy(t)}{dt} + a_{n-1} y(t) + a_n = k u(t)$$

### Modelo diferencial de primer orden

$$\frac{dy(t)}{dt} = -\frac{1}{\tau} y(t) + \frac{k}{\tau} u(t)$$

donde:

u(t) = variable de entrada  
 y(t) = variable de salida  
 $\tau$  = Constante de tiempo  
 k= ganancia del sistema

### Modelo diferencial de segundo orden

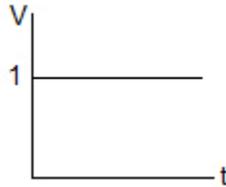
Frecuencia amortiguada

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$$

**Tipos de respuesta****Respuesta escalón**

La respuesta escalón es la variación, respecto al tiempo, de la variable de salida de un elemento de transferencia, cuando la variable de entrada es una función escalón

$$r(t) = c, c = \text{cte.}$$

**Respuesta al escalón de sistemas de primer orden**

$$y(t) = 1 - e^{-\frac{t}{\tau}}$$

**Respuesta al escalón de sistemas de segundo orden**

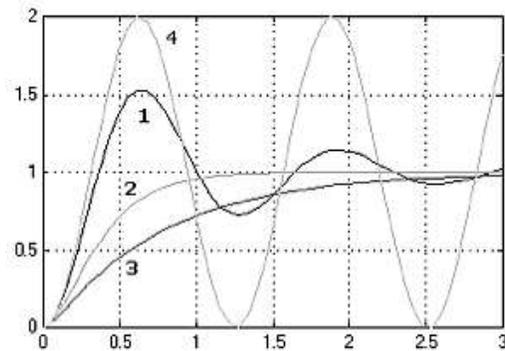
Forma estándar del sistema de segundo orden:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

donde:

$\zeta$  es el factor de amortiguamiento

$\omega$  es la frecuencia angular



1. Subamortiguado  $0 < \zeta < 1$ , raíces complejas conjugadas.

$$y(t) = 1 - e^{-\zeta\omega_n t} \left( \cos(\omega_n t) + \frac{\zeta}{\sqrt{\zeta^2 - 1}} \operatorname{sen}(\omega_n t) \right)$$

2. Críticamente amortiguado  $\zeta = 1$ , raíces reales e iguales.

$$y(t) = 1 - e^{-\omega_n t} - \omega_n t e^{-\omega_n t}$$

3. Sobreamortiguado  $\zeta > 1$ , raíces reales y diferentes.

$$y(t) = 1 + \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \left( \frac{e^{-s_1 t}}{s_1} - \frac{\omega_n t e^{-s_2 t}}{s_2} \right)$$

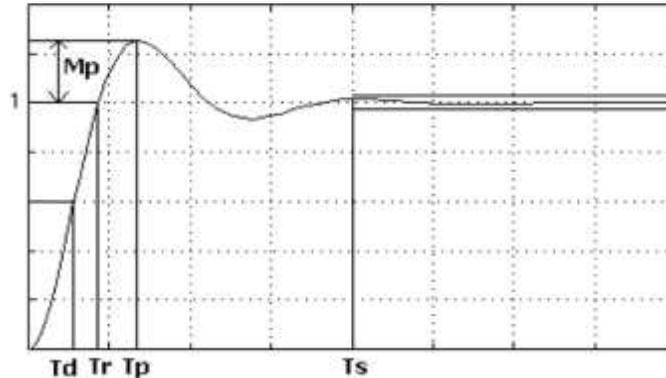
donde:

$$s_1 = \left( \zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1} \right)$$

$$s_2 = \left( \zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1} \right)$$

4. No amortiguado  $\zeta = 0$ , raíces imaginarias puras.

$$y(t) = 1 - \cos(\omega_n t)$$

**Parámetros de la respuesta transitoria**

Tiempo de retardo ( $T_d$ )

Es el tiempo que tarda la respuesta del sistema en alcanzar por primera vez la mitad del valor final.

Tiempo de crecimiento ( $T_r$ )

Es el tiempo requerido para que la respuesta crezca del 0 al 100% de su valor final o del 10 al 90%.

$$T_r = \frac{\pi - \beta}{\omega_d}$$

$$\beta = \tan^{-1} \left( \frac{\omega_d}{\zeta \omega_n} \right)$$

Tiempo pico ( $T_p$ )

Es el tiempo en el cual la respuesta del sistema alcanza el primer pico del sobreimpulso.

$$T_p = \frac{\pi}{\omega_d}$$

Máximo sobreimpulso ( $M_p$ )

Es el valor pico máximo de la respuesta medido desde la unidad.

$$M_p = e^{-\left( \frac{\zeta}{\sqrt{\zeta^2 - 1}} \right) \pi}$$

**Formulario para el sustentante del**

Examen General para el Egreso de la Licenciatura en Ingeniería Electrónica (EGEL-IELECTRO)

**Dirección del Programa de Evaluación de Egreso (EGEL) Diseño, Ingenierías y Arquitectura**Tiempo de establecimiento ( $T_s$ )

Es el tiempo requerido por la curva de respuesta para alcanzar y mantenerse dentro de determinado rango alrededor del valor final especificado en porcentaje absoluto del valor final. Se usa generalmente el 5% o 2%

$$\text{Para un criterio de 2\%, } T_s = \frac{4}{\zeta\omega_n}$$

$$\text{Para un criterio de 5\%, } T_s = \frac{3}{\zeta\omega_n}$$

Tiempo de autonomía de una máquina

$$t = \frac{H}{\left(\frac{IH}{C}\right)^k}$$

donde:

t = Tiempo de autonomía de una máquina [h]

C = Tiempo de carga del fabricante [Ampere h]

H= Tiempo indicado por el fabricante [h]

I = Corriente total que demanda el sistema [A]

k = Coeficiente de Peukert (1.1 para baterías de gel y 1.3 para baterías de plomo-ácido)

Temperatura

$$Temp = kA\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

donde:

Temp = Temperatura [°C]

t= tiempo [s]

 $\tau$  = Constante de tiempo [s]

**Regla de Mason**

La función de transferencia entre una entrada  $U(s)$  y una salida  $Y(s)$  está dada por:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{\Delta} \sum G_i \Delta_i$$

donde:

$G_i$  = ganancia de la trayectoria directa  $i$ -ésima entre  $y_{\text{entrada}}$  y  $y_{\text{salida}}$

$\Delta$  = determinante del sistema =  $1 - \sum$  (ganancia de todos los lazos individuales) +  $\sum$  (productos de las ganancias de todas las combinaciones posibles de dos lazos que no se tocan) -  $\sum$  (productos de las ganancias de todas las combinaciones posibles de tres lazos que no se tocan) +...

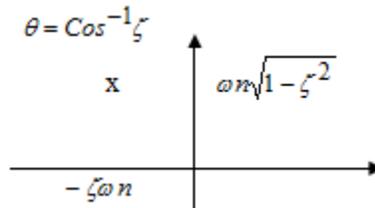
$\Delta_i$  = el valor de  $\Delta$  para aquella parte del diagrama de bloques que no toca la  $k$ -ésima trayectoria directa

Tabla 1. Fórmulas para sintonización por el método de ganancia última

Tipo de controlador	Ganancia proporcional	Tiempo integral	Tiempo derivativo
Proporcional P	$K_u/2.0$	--	--
Proporcional-Integral PI	$K_u/2.2$	$T_u/1.2$	--
Proporcional-Integral-Derivativo PID	$K_u/1.7$	$T_u/2.0$	$T_u/8.0$

## Controladores

Raíces en el plano complejo



Controlador	Ganancia
P	$G_c(s) = K_c$
PI	$G_c(s) = K_c \left( 1 + \frac{1}{\tau_i s} \right)$
PD	$G_c(s) = K_c (1 + \tau_d s)$
PID	$G_c(s) = K_c \left( 1 + \frac{1}{\tau_i s} + \tau_d s \right)$

## Controladores PID

Estructura ideal

$$G_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_c \left( 1 + \frac{1}{\tau_i s} + \tau_d s \right)$$

donde:

$E(s) = R(s) - Y(s)$

$R(s)$  es la transformada de Laplace de la referencia

$Y(s)$  es la transformada de Laplace de la variable de proceso controlada

$U(s)$  es la transformada de Laplace de la variable de manipulación

Sintonización por criterios integrales para cambios en perturbación para un PID ideal

Proporcional-Integral

ISE

IAE

ITAE

$$K_c = \frac{1.305}{K} \left( \frac{t_o}{\tau} \right)^{-0.959}$$

$$K_c = \frac{0.984}{K} \left( \frac{t_o}{\tau} \right)^{-0.986}$$

$$K_c = \frac{0.859}{K} \left( \frac{t_o}{\tau} \right)^{-0.977}$$

$$\tau_i = \frac{\tau}{0.492} \left( \frac{t_o}{\tau} \right)^{0.739}$$

$$\tau_i = \frac{\tau}{0.608} \left( \frac{t_o}{\tau} \right)^{0.707}$$

$$\tau_i = \frac{\tau}{0.674} \left( \frac{t_o}{\tau} \right)^{0.680}$$

### Proporcional-Integral-Derivativo

ISE

IAE

ITAE

$$K_c = \frac{1.495}{K} \left( \frac{t_o}{\tau} \right)^{-0.945}$$

$$K_c = \frac{1.435}{K} \left( \frac{t_o}{\tau} \right)^{-0.921}$$

$$K_c = \frac{1.357}{K} \left( \frac{t_o}{\tau} \right)^{-0.947}$$

$$\tau_i = \frac{\tau}{01.101} \left( \frac{t_o}{\tau} \right)^{0.771}$$

$$\tau_i = \frac{\tau}{0.878} \left( \frac{t_o}{\tau} \right)^{0.749}$$

$$\tau_i = \frac{\tau}{0.842} \left( \frac{t_o}{\tau} \right)^{0.738}$$

$$\tau_d = 0.560 \tau \left( \frac{t_o}{\tau} \right)^{1.006}$$

$$\tau_d = 0.482 \tau \left( \frac{t_o}{\tau} \right)^{1.137}$$

$$\tau_d = 0.381 \tau \left( \frac{t_o}{\tau} \right)^{0.995}$$

donde:

K = la ganancia del proceso de primer orden

$\tau$  = constante de tiempo

$t_o$  = tiempo muerto

Sintonización por criterios integrales para cambios en referencia para un PID ideal

Proporcional-Integral

IAE

ITAE

Proporcional-Integral-Derivativo

IAE

ITAE

**Comunicaciones****Osciladores****Oscilador controlado por voltaje**

Modo de carga

Tiempo de carga en el capacitor

$$\Delta f_1 = \frac{C_1}{I_Q} \Delta v_C = \frac{C_1}{I_Q} (V_H - V_L)$$

Modo de descarga

$$\Delta f_2 = -\frac{C_1}{I_Q} \Delta v_C = -\frac{C_1}{I_Q} (V_L - V_H) = \frac{C_1}{I_Q} (V_H - V_L)$$

$$T = \Delta f_1 + \Delta f_2 = \frac{2C_1 (V_H - V_L)}{I_Q}$$

La frecuencia de oscilación es:

$$f_0 = \frac{1}{T} = \frac{I_Q}{2C_1 (V_H - V_L)}$$

$$I_Q = G_m (v_{CN} + v_{CO})$$

donde:

 $G_m$  = Transconductancia de la fuente de corriente, en A/V $v_{CN}$  = voltaje de control aplicado, en V $v_{CO}$  = voltaje constante

$$K_{VF} = \frac{df_0}{dv_{CN}} = \frac{G_m}{2C_1 (V_H - V_L)}$$

### Oscilador de corrimiento de fase

La función de transferencia del oscilador es:

$$\beta(s) = \frac{V_F(s)}{V_o(s)} = \frac{R^3 C^3 s^3}{R^3 C^3 s^3 + 6R^2 C^2 s^2 + 5RCs + 1}$$

La ganancia de voltaje de lazo cerrado es:

$$A(s) = \frac{V_o(s)}{V_F(s)} = -\frac{R_F}{R_1}$$

La frecuencia de oscilación es:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{6}RC}$$

La resistencia de retroalimentación es:

$$R_F = R_1 \left[ \frac{5}{R^2 C^2 \omega^2} - 1 \right]$$

### Osciladores de cuadratura

La función de transferencia es:

$$\beta(s) = \frac{V_f(s)}{V_o(s)} = \frac{\frac{1}{Cs}}{\frac{R+1}{Cs}} = \frac{1}{1+RCs}$$

La frecuencia de oscilación es:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi RC}$$

La ganancia en lazo cerrado es:

$$A_f = \frac{1}{\beta} = \sqrt{2}$$

El voltaje en la salida es:

$$V_o = \frac{RV_{o1}}{1 + RCs}$$

### Osciladores de Puente Wien

La función de transferencia es:

$$\beta(s) = \frac{V_F(s)}{V_o(s)} = \frac{RCs}{R^2C^2s^2 + 3RCs + 1}$$

La ganancia en voltaje de lazo cerrado es:

$$A(s) = 1 + \frac{R_F}{R_1}$$

La frecuencia de oscilación es:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi RC}$$

La condición para la oscilación es:

$$\frac{R_F}{R_1} = 2$$

### Oscilador Colpitts

La ganancia de lazo cerrado es:

$$1 - A\beta = 0$$

La frecuencia de oscilación es:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2 L} \right]^{\frac{1}{2}}$$

### Oscilador de Harley

La frecuencia de oscilación es:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{1}{C(L_1 + L_2)} \right]^{\frac{1}{2}}$$

### Osciladores de cristal

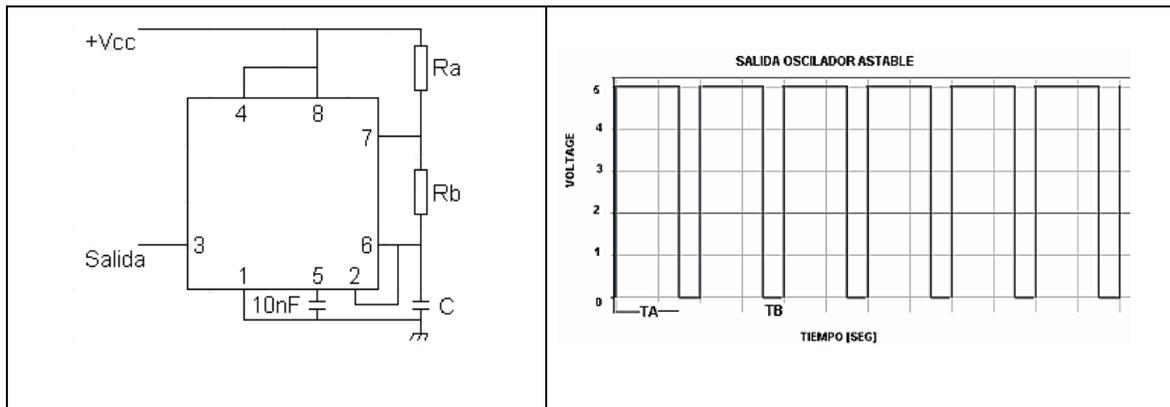
La impedancia del cristal esta dada por:

$$Z(s) = \frac{1}{sC_p} \frac{s^2 + \omega_s^2}{s^2 + \omega_p^2}$$

La frecuencia de oscilación es:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC_s}}$$

### 555/556 (Multivibrador astable)



donde:

$$TA = 0.693(R_a + R_b)C$$

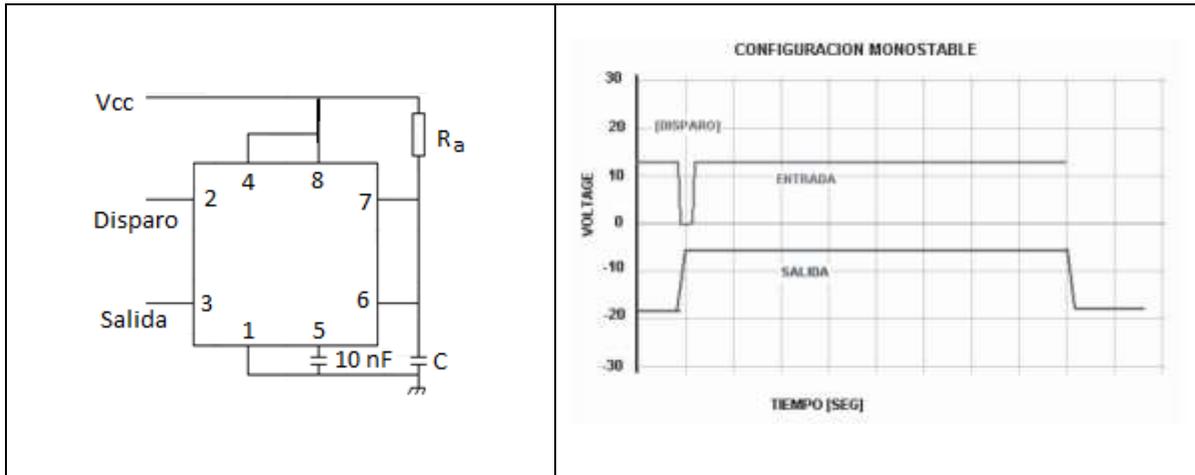
$$TB = 0.693R_bC$$

La frecuencia con que la señal de salida oscila está dada por la fórmula:

$$f_0 = \frac{1.44}{(R_a + 2R_b)C}$$

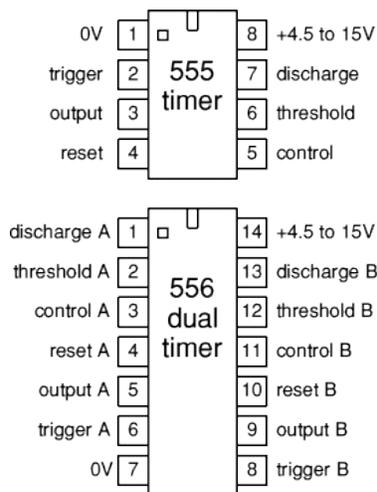
y el período es simplemente:  $T = 1/f_0$

**555/556 (monoestable)**



El tiempo o periodo es igual a:

$$T = 1.1R_a C$$



La especificación mínima de muestras por segundo de una tarjetaDAQ

frecuencia mínima de muestreo =  $2 \cdot f_{max}$

**Formulario para el sustentante del**

Examen General para el Egreso de la Licenciatura en Ingeniería Electrónica (EGEL-IELECTRO)

**Dirección del Programa de Evaluación de Egreso (EGEL) Diseño, Ingenierías y Arquitectura****Modulación y demodulación AM-FM**

Modulación en amplitud

Señal moduladora

$$y_s(t) = A_s \cos(\omega_s t)$$

Señal portadora

$$y_p(t) = A_p \cos(\omega_p t)$$

Señal modulada

$$y(t) = A_p [1 + mA_p x_n(t)] \cos(\omega_p t)$$

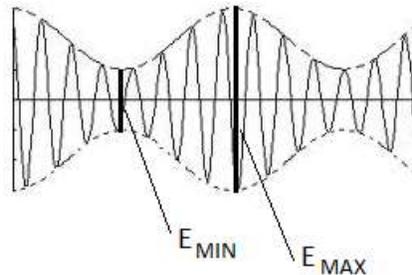
donde:

 $y(t)$  = señal modulada $x_n(t)$  = señal moduladora normalizada con respecto a su amplitud =  $y_s(t) / A_s$  $m$  = índice de modulación (suele ser menor que la unidad) =  $A_s / A_p$ 

Índice de modulación en A.M.

$$m = \frac{E_{\max} - E_{\min}}{E_{\max} + E_{\min}}$$

donde:

 $y(t)$  = señal modulada $x_n(t)$  = señal moduladora normalizada con respecto a su amplitud $m$  = índice de modulación (suele ser menor que la unidad)

Factor de modulación:

$$m_t = \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + \dots}$$

donde:

$m_t$  = índice de modulación total

$m_1, m_2, m_3$  = índice de modulación de las señales moduladoras

Potencia total transmitida

$$P_t = P_c + \frac{m^2}{4} P_c + \frac{m^2}{4} P_c$$

donde:

$P_t$  = potencia total transmitida (W)

$P_c$  = potencia de portadora (W)

$m$  = índice de modulación

La expresión matemática de la señal modulada en frecuencia está dada por:

$$v(t) = V_p \text{sen} \left[ 2\pi f_p t + \frac{\Delta f}{f_m} \cos(2\pi f_m t) \right]$$

El índice de modulación es:

$$m = \frac{\Delta f}{f_m}$$

donde:

$m_f$  = índice de modulación

$\Delta f$  = variación de la frecuencia de la portadora

$F_m$  = frecuencia de la portadora

**Decibel**

$$dB = 10 \log_{10} \left( \frac{P_1}{P_0} \right)$$

El decibel referenciado a 1 mW

$$P(dBm) = 10 \log_{10} \left( \frac{P_1}{1 \text{ mW}} \right)$$

**Formulario para el sustentante del**

Examen General para el Egreso de la Licenciatura en Ingeniería Electrónica (EGEL-IELECTRO)

**Dirección del Programa de Evaluación de Egreso (EGEL) Diseño, Ingenierías y Arquitectura**

Densidad de flujo ( $W/m^2$ )

$$S(dB_{W/m^2}) = 10 \log_{10} \left( \frac{P_1}{1 W/m^2} \right)$$

Decibel referenciado a  $\mu V$

$$U(dB_{\mu V}) = 20 \log_{10} \left( \frac{U_1}{1 \mu V} \right)$$

Acoplamiento de impedancias

Decibel en antenas

dBi = Ganancia de una antena referenciada a una antena isotrópica

dBd = Ganancia de una antena referenciada a una antena dipolo

dBq = Ganancia de una antena referenciada a una antena de un cuarto longitud de onda

Decibel en acústica

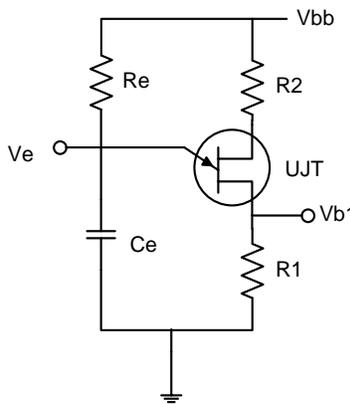
dB(SPL) = Nivel de presión del sonido relativo a  $20 \mu Pa$

dB(PA) = dB relativo a un pascal

dB SIL = intensidad de nivel de sonido referenciado a  $10 E-12 W/m^2$

dB SWL = Nivel de potencia del sonido referenciado a  $10E - 12W$

**Oscilador de relajación UJT**



donde:

$$V_p = V_d + V_a = V_d + nV_{bb}$$

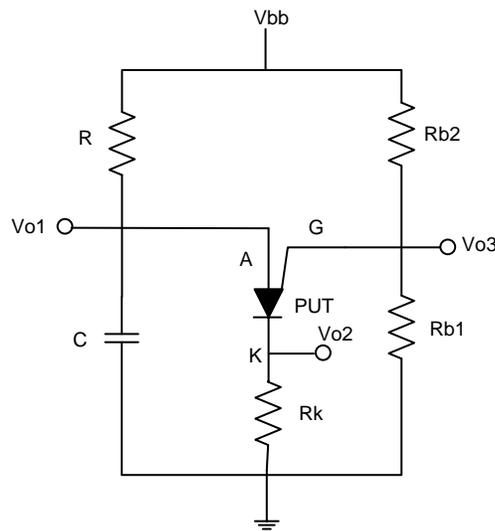
$$n = \frac{R_1}{R_1 + R_2} = \frac{R_1}{R_{bb}}$$

$$T = R_e C_e \ln \frac{1}{1-n}$$

$$R_{e\max} = \frac{(V_{bb} - V_p)}{I_p}$$

$$V_{bb} = R_{e\min} I_v + V_v$$

### Oscilador de relajación PUT



donde:

$$V_g = \frac{V_{bb} R_{b1}}{R_{b1} + R_{b2}} = n V_{bb}$$

$$V_{ak} = V_p = V_d + V_g = 0.7 + n V_{bb}$$

$$T = RC \ln \frac{1 + R_{b1}}{R_{b2}}$$

$$R_{\max} = \frac{(V_{bb} - V_p)}{I_p}$$

$$R_{\min} = \frac{V_{bb} - V_v}{v}$$

**Instrumentación**

**Valor promedio**

$$A_{prom} = \frac{\text{área bajo la curva}}{\text{longitud del periodo}}$$

Siendo  $A_{prom}$  el valor promedio de la onda

$$A_{prom} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$$

**El valor rms**

$$A_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T [f(t)]^2 dt}$$

<b>Señal senoidal</b>	<b>Rectificador de media onda (señal senoidal)</b>
$A_{prom} = 0$ $A_{rms} = \frac{A_0}{\sqrt{2}}$	$A_{prom} = \frac{A_0}{\pi}$ $A_{rms} = \frac{A_0}{2}$
<b>Rectificador de onda completa (señal senoidal)</b>	<b>Señal triangular</b>
$A_{prom} = \frac{2A_0}{\pi}$ $A_{rms} = \frac{A_0}{\sqrt{2}}$	$A_{prom} = 0$ $A_{rms} = \frac{A_0}{\sqrt{3}}$
<b>Señal cuadrada</b>	<b>Señal senoidal desplazada con CD</b>
$A_{prom} = \frac{A_0}{2}$ $A_{rms} = \frac{A_0}{\sqrt{2}}$	$A_{prom} = A_0$ $A_{rms} = \sqrt{A_0^2 + \frac{1}{2}A_1^2}$

**Errores en medición**

$$\text{Error absoluto} = \text{Resultado} - \text{Valor verdadero}$$

$$\text{Error relativo} = \frac{\text{Error absoluto}}{\text{Valor verdadero}}$$

**Puentes de Wheatstone**

$$\frac{R_x}{R_3} = \frac{R_2}{R_1}$$

Puente ligeramente desbalanceado

$$R_{TH} = (R_1 \parallel R_2) + (R_3 \parallel R_x)$$

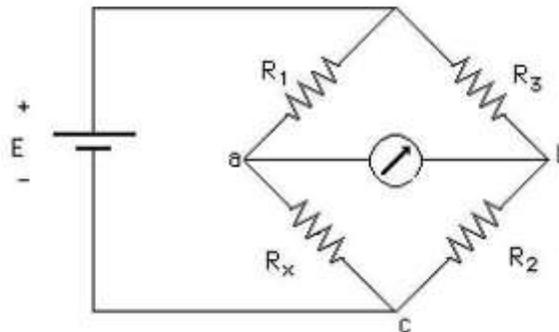
$$V_{TH} = V_0 \frac{R_3 \Delta R}{2R_3 R_x + R_3^2 + R_x^2}$$

Si las cuatro resistencias son iguales el puente esta en equilibrio por lo cual:

$$R_{TH} = R$$

$$V_{TH} = V_0 \frac{\Delta R}{4R}$$

$$R_1 R_2 = R_3 R_x$$



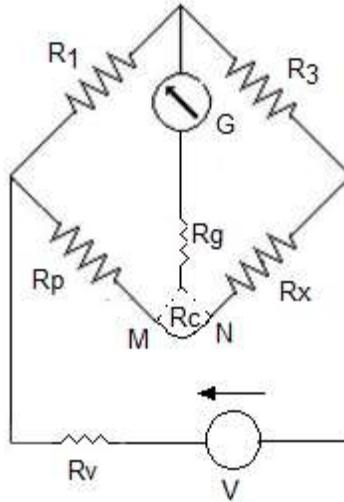
**Formulario para el sustentante del**

Examen General para el Egreso de la Licenciatura en Ingeniería Electrónica (EGEL-IELECTRO)

**Dirección del Programa de Evaluación de Egreso (EGEL) Diseño, Ingenierías y Arquitectura**

**Puente de Kelvin**

$$\frac{R_5}{R_6} = \frac{R_1}{R_2}$$



**Ruido térmico o ruido de Jhonson**

$$E_n = \sqrt{4KTR(f_H - f_L)}$$

donde:

$K$  = constante de Boltzman =  $1.38E-23$  J/K

$T$  = temperatura (K)

$R$  = Valor de la resistencia ( $\Omega$ )

$f_H$  = frecuencia máxima de operación (Hz)

$f_L$  = frecuencia mínima de operación (Hz)

**Termopar**

La relación de temperatura voltaje es:

$$V_0 = AT + BT^2$$

<b>Características de los termopares</b>				
Tipo	Composición	Rango de medición continua (°C)	Sensibilidad aprox. ( $\mu\text{V}/^\circ\text{C}$ )	Notas
<b>B</b>	Platino 30% Rodio (+) Platino 6% Rodio (-)	50 a 1800	10	Fácilmente contaminado, requiere protección.
<b>C</b>	Tungsteno 5% Renio (+) Tungsteno 26% Renio (-)	0 a 2300		Sin resistencia a la oxidación. Para usos en vacío, hidrógeno o atmósferas inertes.
<b>E</b>	Cromel (+) Constantán (-)	-40 a 800	68	No someterlo a la corrosión en temperaturas criogénicas.
<b>J</b>	Hierro (+) Constantán (-)	-100 a 750	55	Recomendado en ambientes reductores o secos. El cable de hierro se oxida en altas temperaturas, por lo que se usan calibres gruesos para compensar.
<b>K</b>	Cromel (+) Alumel (-)	-180 a 1300	41	No recomendado en ambientes con presencia de azufre. Se usa en ambientes inertes o levemente oxidantes.
<b>N</b>	Nicrosil (+) Nisil (-)	-270 a 1300	39	Mayor resistencia a la oxidación y al sulfuro que el tipo "K"; estable a alta temperatura.
<b>R</b>	Platino 13% Rodio (+) Platino (-)	0 a 1600	10	Recomendado en atmósferas oxidantes. Fácil de contaminarse, requiere protección.
<b>S</b>	Platino 10% Rodio (+) Aquí me quede Platino (-)	0 a 1600	10	Patrón de laboratorio, altamente reproducible. Buena resistencia a

**Formulario para el sustentante del**

Examen General para el Egreso de la Licenciatura en Ingeniería Electrónica (EGEL-IELECTRO)

**Dirección del Programa de Evaluación de Egreso (EGEL) Diseño, Ingenierías y Arquitectura**

Características de los termopares				
Tipo	Composición	Rango de medición continua (°C)	Sensibilidad aprox. (µV/°C)	Notas
				ambientes oxidantes, pobre resistencia a ambientes reductores.
<b>T</b>	Cobre (+) Constantán (-)	-185 a 400	43	El más estable en rangos de temperatura criogénica. Excelente en atmósferas reductoras y oxidantes dentro del rango de temperatura.

**Termistor**

El cambio de resistencia de los termistores en respuesta a cambios en la temperatura

$$\frac{1}{T} = A + B(\ln R) + C(\ln R)^3$$

donde:

 $T$  = temperatura (K) $R$  = resistencia del termistor ( $\Omega$ ) $A, B, C$  = constantes del ajuste de curva

La aproximación de la resistencia se obtiene con:

$$R = R_0 e^{\beta \left( \frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right)}$$

donde:

 $R$  = resistencia a la temperatura  $T$  (K) $R_0$  = resistencia a  $T_0$  (K) $\beta$  = constante del ajuste de curva

**Sensores****Sensores resistivos**

Potenciómetros

$$R = \frac{\rho}{A} l(1 - \alpha) = \frac{\rho}{A} (l - x)$$

donde:

 $x$  = distancia recorrida desde un punto fijo $\alpha$  = fracción de longitud correspondiente en un punto fijo $\rho$  = coeficiente de resistividad del material $l$  = longitud del material $A$  = sección transversal del material**Galgas extensométricas**

Las galgas extensométricas se basan en la variación de la resistencia de un conductor o un semiconductor cuando es sometido a un esfuerzo mecánico.

$$R = \rho \frac{l}{A}$$

Si se somete a un esfuerzo en la dirección longitudinal  $R$  cambia.

$$\frac{dR}{R} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dl}{l} - \frac{dA}{A}$$

El cambio de longitud que resulta se determina a través de la ley de Hooke

$$\sigma = \frac{F}{A} = E\varepsilon = E \frac{dl}{l}$$

donde:

 $E$  = módulo de Young $\sigma$  = tensión mecánica $\varepsilon$  = deformación unitaria

**Formulario para el sustentante del**

Examen General para el Egreso de la Licenciatura en Ingeniería Electrónica (EGEL-IELECTRO)

**Dirección del Programa de Evaluación de Egreso (EGEL) Diseño, Ingenierías y Arquitectura****Fotorresistencia**

Energía de la radiación óptica

$$E = hf$$

donde:

 $E$  = energía $h$  = constante de Planck  $6.62 \times 10^{-34} \text{Ws}^2$  $f$  = frecuencia

Para la longitud de onda de radiación

$$\lambda = \frac{hc}{E}$$

donde:

 $c$  = velocidad de la luz $h$  = constante de Plack $E = 1.602\text{E-}19 \text{ J}$ **Sensores capacitivos**

Condensadores variables

$$C \approx \epsilon_0 \epsilon_r \frac{A}{d} (n-1)$$

donde:

 $A$  = área de las placas $d$  = distancia entre pares de placas $\epsilon_r$  = constante dieléctrica relativa $\epsilon_0 = 8.85 \text{ pF/m}$ 

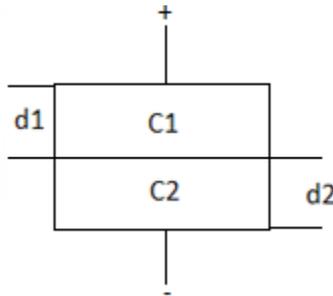
Los sensores capacitivos no son lineales, su linealidad depende del parámetro que varía y del tipo de medición. En un condensador plano, si varía  $A$  o  $\epsilon_r$  por lo cual:

$$C = \epsilon \frac{A}{d(1+\alpha)}$$

donde:

$$\alpha = \frac{d}{x}$$

Condensador diferencial



$$C_1 = \frac{\epsilon A}{d_1 + x}$$

$$C_2 = \frac{\epsilon A}{d_2 - x}$$

$$V_i = V \frac{\frac{1}{d_i - x}}{\frac{1}{d_i + x} + \frac{1}{d_i - x}} = V \frac{d_i - x}{2d_i}$$

Por lo cual, para el caso en que  $d_1$  y  $d_2$ , se tiene:

$$V_1 - V_2 = V \frac{x}{d}$$

### Sensores inductivos

La inductancia se expresa como:

$$L = N \frac{d\phi}{di}$$

donde:

$N$  = número de vueltas del circuito

$i$  = corriente

$\phi$  = flujo magnético

El flujo magnético se obtiene con:

$$\Phi = \frac{M}{R}$$

**Formulario para el sustentante del**

Examen General para el Egreso de la Licenciatura en Ingeniería Electrónica (EGEL-IELECTRO)

**Dirección del Programa de Evaluación de Egreso (EGEL) Diseño, Ingenierías y Arquitectura**

donde:

 $M$  = fuerza electromotriz $R$  = reluctanciaPara una bobina de sección  $A$  y de longitud  $l$ , la reluctancia es:

$$R = \frac{1}{\mu_0 \mu_r} \frac{l}{A}$$

**Sensores electromagnéticos**

Sensor basado en la ley de Faraday

$$e = -N \frac{d\Phi}{dt}$$

Tacogeneradores

La tensión inducida por el generador es:

$$e = NBA\omega \sin\omega t$$

Si  $\omega$  es constante

$$e = -NBA\omega \cos\omega t$$

Sensores de velocidad lineal

$$e = Blv$$

donde:

 $L$  = longitud del conductor $v$  = velocidad lineal

**Sensores de efecto Hall**

$$A_H = \frac{V_H t}{IB}$$

Aportación de magnitud y fase para cada término de la función de transferencia

Término	Magnitud logarítmica	Ángulo de fase	Magnitud logarítmica	Ángulo de fase
K	$20 \log K$	$\phi = 0^\circ$	$20 \log K$	$\phi = 0^\circ$
$j\omega$	$20 \log \omega$	$\phi = 90^\circ$	Línea diagonal con pendiente 20 dB/dec que cruza el punto ( $w=1, db=0$ )	$\phi = 90^\circ$
$\frac{1}{j\omega}$	$-20 \log \omega$	$\phi = -90^\circ$	Línea diagonal con pendiente -20 dB/dec que cruza el punto ( $w=1, db=0$ )	$\phi = -90^\circ$
$j\omega\tau + 1$	$20 \log \omega\tau$	$\phi = \tan^{-1} \omega\tau$	0 db, hasta la frecuencia de corte. $\omega = \frac{1}{\tau}$ Pendiente 20 dB/dec a partir de $\omega > \frac{1}{\tau}$	de $\phi = 0^\circ$ a $90^\circ$ en $\omega = \frac{1}{\tau} = 45^\circ$
$\frac{1}{j\omega\tau + 1}$	$-20 \log \omega\tau$	$\phi = -\tan^{-1} \omega\tau$	0 db, hasta la frecuencia de corte $\omega = \frac{1}{\tau}$ Pendiente -20 dB/dec a partir de $\omega > \frac{1}{\tau}$	de $\phi = 0^\circ$ a $-90^\circ$ en $\omega = \frac{1}{\tau} = -45^\circ$
$-\frac{\omega^2}{\omega_n^2} + \frac{j\omega}{\omega_n} + 1$	$40 \log \left( \frac{\omega}{\omega_n} \right)$	$\phi = \tan^{-1} \left[ \frac{2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \left( \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2} \right]$	Línea horizontal 0 db hasta $\omega = \omega_n$ Pendiente 40 dB/dec para $\omega > \omega_n$	de $\phi = 0^\circ$ a $180^\circ$ en $\omega = \omega_n = 90^\circ$
$\frac{1}{-\frac{\omega^2}{\omega_n^2} + \frac{j\omega}{\omega_n} + 1}$	$-40 \log \left( \frac{\omega}{\omega_n} \right)$	$\phi = -\tan^{-1} \left[ \frac{2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \left( \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2} \right]$	Línea horizontal 0 db hasta $\omega = \omega_n$ Pendiente -40 dB/dec para $\omega > \omega_n$	de $\phi = 0^\circ$ a $-180^\circ$ en $\omega = \omega_n = -90^\circ$
$e^{-j\omega t_0}$	0	$\phi = -57.3\omega t_0$	0	$\phi = -57.3\omega t_0$

**Formulario para el sustentante del**

Examen General para el Egreso de la Licenciatura en Ingeniería Electrónica (EGEL-IELECTRO)

**Dirección del Programa de Evaluación de Egreso (EGEL) Diseño, Ingenierías y Arquitectura****Transformada Z**

La TZ bilateral de una señal definida en el dominio del tiempo discreto  $x[n]$  es una función  $X(z)$  que se define:

$$X(z) = Z\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

donde:

$n$ = un entero

$z$ = un número complejo

**Tablas adicionales de datos prácticos**

Sistema de unidades eléctricas. Fórmulas fundamentales en CD

Magnitud		Sistema				Fórmulas más utilizadas para su cálculo
		MKSI		CGSEM		
		Unidad	Símbolo	Unidad	Símbolo	
Desplazamiento o inducción	I, i	Ampere	A			$I=V/R$
Cantidad de electricidad	Q	Coulomb	Q			$Q=I \cdot t$
d.d.p. o tensión	U	Volt	V			$V=R \cdot I$
Resistencia	R	Ohm	$\Omega$			$R=V/I$
Capacidad	C	Farad	F			$C=Q/V$
Campo eléctrico y gradiente de potencia	E	V/m	--			$E=F/Q$
Desplazamiento o inducción electrostática	D	$Q/m^2$	--			$D=\epsilon \cdot E$
Inducción magnética	B	Tesla	$W/m^2$	Gauss	Gs	$\beta=1.25 \cdot N \cdot I \cdot \mu/L$ (Gs)
Campo magnético	H	A/m	--	Oersted	Oe	$H=1.25 \cdot N \cdot I/L$ (Oe)
Permeabilidad	$\mu$	--	--			$\mu=B/H$
Flujo magnético	$\Phi$	Weber	Wb	Maxwell	Mx	$\Phi=1.25 \cdot N \cdot I \cdot \mu \cdot S/L$ (mx)
Fuerza magnetomotriz		Ampere	At, A	Gisbert	Gb	$\epsilon=1.25 \cdot N \cdot I$
.Inductancia	L	Henry	H			$L=N \cdot \phi/10^8 \cdot I$
Reluctancia	R	At/Wb				$R=I/S \cdot \mu$
Intensidad luminosa	I	Candela	Cd			$I=\phi/\omega$
Flujo luminoso	$\Phi$	Lumen	lm			$\Phi=Q/t$
Cantidad de luz	Q	lm/s	--			--
Iluminación	E	Lux	lx			$E=\phi/S$
Brillo		Stilb	sb			$S_b=1 \text{ cd}/1 \text{ cm}^2$ $1 \text{ nit}= 1 \text{ cd}/1 \text{ m}^2$

**Formulario para el sustentante del**

Examen General para el Egreso de la Licenciatura en Ingeniería Electrónica (EGEL-IELECTRO)

**Dirección del Programa de Evaluación de Egreso (EGEL) Diseño, Ingenierías y Arquitectura****Resistividad  $\rho$  y conductividad  $\gamma$  de conductores (a 20 °C)**

Material	$\frac{\rho}{\Omega \cdot mm^2}$ $m$	$\gamma = \frac{1}{\rho}$	Material	$\frac{\rho}{\Omega \cdot mm^2}$ $m$	$\gamma = \frac{1}{\rho}$
Acero dulce	0.1300	7.700	Latón Ms 63	0.0710	14.00
Aluminio	0.0278	36.00	Magnesio	0.0435	23.00
Antimonio	0.4170	2.400	Manganina	0.4230	2.370
Cadmio	0.0760	13.10	Mercurio	0.9410	1.063
Carbón	40.000	0.025	Níquel	0.0870	11.50
Cobre (eléc.)	0.0175	57.00	Niquelina	0.5000	2.000
Constantán	0.4800	2.080	Oro	0.0222	45.00
Cromo-Ni-Fe	0.1000	10.00	Plata	0.0160	62.50
Estaño	0.1200	8.300	Plata alemana	0.3690	2.710
Hierro fundido	1.0000	1.000	Platino	0.1110	9.000
Hierro (puro)	0.1000	10.00	Plomo	0.2080	4.800
Grafito	8.0000	0.125	Tungsteno	0.0590	17.00
Latón Ms 58	0.0590	17.00	Zinc	0.0610	16.50

**Resistividad de  $\rho$  aislantes**

Material	$\Omega \cdot cm$	Material	$\Omega \cdot cm$
Aceite de parafina	$10^{18}$	Mica	$10^{17}$
Agua de mar	$10^6$	Parafina (pura)	$10^{18}$
Agua destilada	$10^7$	Plexiglás	$10^{15}$
Ámbar comprimido	$10^{18}$	Poliestireno	$10^{18}$
Baquelita	$10^{14}$	Porcelana	$10^{14}$
Caucho (hule) duro	$10^{18}$	Tierra húmeda	$10^8$
Mármol	$10^{10}$	Vidrio	$10^{15}$

**Coefficiente térmico de resistencia  $\alpha_{20}$  (a 20 °C)**

Material	$^{\circ}C^{-1}, K^{-1}$	Material	$^{\circ}C^{-1}, K^{-1}$
Acero dulce	+ 0.00660	Manganina	+/- 0.00001
Aluminio	+ 0.00390	Mercurio	+ 0.00090
Carbón	-0.00030	Níquel	+ 0.00400
Cobre	+0.00380	Niquelina	+ 0.00023
Constantán	-0.00003	Plata	+ 0.00377
Estaño	+ 0.00420	Plata alemana	+ 0.00070
Grafito	-0.00020	Platino	+ 0.00390
Latón	+ 0.00150	Zinc	+ 0.00370

**Constante dieléctrica  $\epsilon_r$** 

Material aislante	$\epsilon_r$	Material aislante	$\epsilon_r$	Material aislante	$\epsilon_r$
Aceite de oliva	3	Caucho (hule) duro	4	Papel Kraft	4.5
Aceite de parafina	2.2	Caucho (hule) suave	2.5	Papel pescado	4
Aceite de ricino	4.7	Compuesto (compound)	2.5	Parafina	2.2
Aceite mineral para transformadores	2.2	Cuarzo	4.5	Petróleo	2.2
Aceite vegetal para transformadores	2.5	Ebonita	2.5	Pizarra	4
Agua	80	Esteatita	6	Plexiglás	3.2
Aire	1	Fibra vulcanizada	2.5	Poliamida	5
Aislamiento para cable alta tensión	4.2	Gutapercha	4	Poliestireno	3
Aislamiento para cable telefónico	1.5	Laca (Shellac)	3.5	Porcelana	4.4
Araldita	3.6	Mármol	8	Resina fenólica	8
Baquelita	3.6	Mica	6	Teflón	2
Cartón comprimido	4	Micanita	5	Tela	4
		Papel	2.3	Trementina (aguarrás)	2.2
		Papel impregnado	5	Vidrio	5

**Serie de potenciales electroquímicos****Diferencia de potencial referida a electrodo de hidrógeno**

Material	Volts	Material	Volts	Material	Volts
Aluminio	-1.66	Hidrógeno	0.00	Platino	+1.20
Berilio	-1.85	Hierro	-0.41	Plomo	-0.13
Cadmio	-0.40	Magnesio	-2.37	Potasio	-2.93
Calcio	-2.87	Manganeso	-1.19	Sodio	-2.71
Cobalto	-0.28	Mercurio	+0.85	Tungsteno	-0.58
Cobre	+0.34	Níquel	-0.23	Zinc	-0.76
Cromo	-0.74	Oro	+1.50		
Estaño	-0.14	Plata	+0.80		

**Números estandarizados mediante una razón progresiva**

Serie E 6 ( $\approx \sqrt[6]{10}$ )			Serie E 12 ( $\approx \sqrt[12]{10}$ )			Serie E 24 ( $\approx \sqrt[24]{10}$ )		
1.0	2.2	4.7	1.0	2.2	4.7	1.0	2.2	4.7
						1.1	2.4	5.1
			1.2	2.7	5.6	1.2	2.7	5.6
						1.3	3.0	6.2
1.5	3.3	6.8	1.5	3.3	6.8	1.5	3.3	6.8
						1.6	3.6	7.5

**Formulario para el sustentante del**

Examen General para el Egreso de la Licenciatura en Ingeniería Electrónica (EGEL-IELECTRO)

**Dirección del Programa de Evaluación de Egreso (EGEL) Diseño, Ingenierías y Arquitectura**

			1.8	3.9	8.2	1.8	3.9	8.2
						2.0	4.3	9.1
10	22	47	10	22	47	10	22	47
etc.			etc.			etc.		

**Intensidad de campo  $h$  y permeabilidad relativa  $\mu_r$  en función de la inducción magnética  $b$  deseada**

Inducción o densidad de flujo		Hierro fundido		Acero fundido y lámina tipo "dynamo" $\rho_{Fe10} = 3.6 \frac{W}{kg}$		Lámina de acero aleado $\rho_{Fe10} = 1.3 \frac{W}{kg}$	
		$H$	$\mu_r$	$H$	$\mu_r$	$H$	$\mu_r$
$B$		$H$	$\mu_r$	$H$	$\mu_r$	$H$	$\mu_r$
Tesla ( $T=Vs/m^2$ )	Gauss(Gs)	A/m		A/m		A/m	
0.1	1 000	440	181	30	2 650	8.5	9 390
0.2	2 000	740	215	60	2 650	25	6 350
0.3	3 000	980	243	80	2 980	40	5 970
0.4	4 000	1 250	254	100	4 180	65	4 900
0.5	5 000	1 650	241	120	3 310	90	4 420
0.6	6 000	2 100	227	140	3 410	125	3 810
0.7	7 000	3 600	154	170	3 280	170	3 280
0.8	8 000	5 300	120	190	3 350	220	2 900
0.9	9 000	7 400	97	230	3 110	280	2 550
1.0	10 000	10 300	77	295	2 690	355	2 240
1.1	11 000	14 000	63	370	2 360	460	1 900
1.2	12 000	19 500	49	520	1 830	660	1 445
1.3	13 000	29 000	36	750	1 380	820	1260
1.4	14 000	42 000	26	1 250	890	2 250	495
1.6	16 000			3 500	363	8 500	150
1.7	17 000			7 900	171	13 100	103
1.8	18 000			12 000	119	21 500	67
1.9	19 000			19 100	79	39 000	39
2.0	20 000			30 500	52	115 000	14
2.1	21 000			50 700	33		
2.2	22 000			130 000	13		
2.3	23 000			218 000	4		

**Valores para lámina tipo “dynamo” (de la norma din 46 400)**

Clase		Lámina normal	Lámina de aleación			
			Baja	Mediana	Alta	
Tipo		I 3.6	II 3.0	III 2.3	IV 1.5	IV 1.3
Tamaño mm x mm		1 000 x 2 000				750 x 1 500
Espesor, mm		0.5				0.35
Densidad, kg/dm <sup>3</sup>		7.8	7.75	7.65	7.6	
Valor máximo de las pérdidas, W/kg	$\rho_{Fe10}$	3.6	3.0	2.3	1.5	1.3
	$\rho_{Fe10}$	8.6	7.2	5.6	3.7	3.3
Valor mínimo de la inducción	$B_{25}$	Tesla	1.53	1.50	1.47	1.43
		Gauss	15 300	15 300	14 700	14 300
	$B_{50}$	Tesla	1.63	1.60	1.57	1.55
		Gauss	16 300	16 000	15 700	15 500
$B_{100}$	Tesla	1.73	1.71	1.69	1.65	
	Gauss	17 300	17 100	16 900	16 500	
$B_{300}$	Tesla	1.98	1.95	1.93	1.85	
	Gauss	19 800	19 500	19 300	18 500	

Explicaciones:  $B_{25}$  = 1.53 tesla significa que una inducción o densidad de flujo mínima de 1.53 T se alcanzará con una intensidad de campo de 25 A/cm. Para una línea de flujo de, p. ej., 5 cm, se necesitarán:  $5 \times 25 = 125$  A.

$\rho_{Fe10}$	Pérdidas magnéticas por unidad de masa con las inducciones de:	10 000 Gs = 1.0 tesla
$\rho_{Fe15}$		15 000 Gs = 1.5 tesla

Los valores corresponden a las siguientes condiciones:

Densidad a  $t=15$  °C

Temperaturas (o puntos) de fusión y de ebullición para  $\rho = 1.0132$  bar = 760 Torr

Los valores entre paréntesis indican sublimación, o sea, cambio directo del estado sólido al gaseoso.

Conductividad térmica a 20 °C

Capacidad térmica específica (o calor específico) para el intervalo de temperaturas  $0 < t < 100$  °C

Sustancia	Puntos de				
	Densidad $\rho$	Fusión (soldf.)	Ebullición	Conductividad térmica k	Calor específico c
	kg/dm <sup>3</sup>	°C	°C	W/(mK) <sup>(1)</sup>	kJ/(kgK) <sup>(2)</sup>
Aceite de colza	0.91 <sup>(3)</sup>	-3.5	300	0.17	1.97
Aceite de linaza	0.94 <sup>(3)</sup>	-20	316	0.15	
Aceite para calefacción	0.92 <sup>(3)</sup>	-5	175-350	0.12	

**Formulario para el sustentante del**

Examen General para el Egreso de la Licenciatura en Ingeniería Electrónica (EGEL-IELECTRO)

**Dirección del Programa de Evaluación de Egreso (EGEL) Diseño, Ingenierías y Arquitectura**

Aceite para máquinas	0.91	-5	380-400	0.126	1.67
Aceite para transformadores	0.87	-5	170	0.15	1.84
Acero	7.85	~1 350	2 500	47-58	0.46
Acero colado	7.8	~1 350		52.3	0.502
Acero dulce	7.85	~1 400	2 500	46.5	0.461
Acero de alta velocidad	8.4-9.0	~1 650	2 600	25.6	0.498
Acetona	0.79 <sup>(3)</sup>		56.1		
Ácido acético	1.08	16.8	118		
Ácido cianhídrico	0.7	-15	27		
Ácido clorhídrico 10%	1.05	-14	102	0.50	3.14
Ácido clorhídrico 40%	1.20				
Ácido fluorhídrico	0.99	-92.5	19.5		
Ácido nítrico	1.56 <sup>(4)</sup>	-1.3	86	0.53	2.72
Ácido sulfúrico	1.49 <sup>(5)</sup>	-73	-10		1.34
Ácido sulfúrico 50%	1.40				
Ácido sulfúrico concentrado	1.84	10-0	338	0.5	1.38
Ágata	~2.6	~1 600	~2 600	11.20	0.80
Agua	1.0 <sup>(6)</sup>	0	100	0.58	4.183
Alcohol	0.79	-130	78.4	0.17-0.23	2.42
Alcohol etílico 95%	0.82 <sup>(3)</sup>	-90	78	0.16	
Alcohol metílico	0.8	-98	66		2.51

Ceneval, A.C.  
Camino al Desierto de los Leones (Altavista) 19,  
Col. San Ángel, Del. Álvaro Obregón, C.P. 01000, México, CDMX  
www.ceneval.edu.mx

El Centro Nacional de Evaluación para la Educación Superior es una asociación civil sin fines de lucro que quedó formalmente constituida el 28 de abril de 1994, como consta en la escritura pública número 87036 pasada ante la fe del notario 49 de la Ciudad de México. Sus órganos de gobierno son la Asamblea General, el Consejo Directivo y la Dirección General. Su máxima autoridad es la Asamblea General, cuya integración se presenta a continuación, según el sector al que pertenecen los asociados, así como los porcentajes que les corresponden en la toma de decisiones:

**Asociaciones e instituciones educativas (40%):**

Asociación Nacional de Universidades e Instituciones de Educación Superior, A.C. (ANUIES); Federación de Instituciones Mexicanas Particulares de Educación Superior, A.C. (FIMPES); Instituto Politécnico Nacional (IPN); Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey (ITESM); Universidad Autónoma del Estado de México (UAEM); Universidad Autónoma de San Luis Potosí (UASLP); Universidad Autónoma de Yucatán (UADY); Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM); Universidad Popular Autónoma del Estado de Puebla (UPAEP); Universidad Tecnológica de México (UNITEC).

**Asociaciones y colegios de profesionales (20%):**

Barra Mexicana Colegio de Abogados, A.C.; Colegio Nacional de Actuarios, A.C.; Colegio Nacional de Psicólogos, A.C.; Federación de Colegios y Asociaciones de Médicos Veterinarios y Zootecnistas de México, A.C.; Instituto Mexicano de Contadores Públicos, A.C.

**Organizaciones productivas y sociales (20%):**

Academia de Ingeniería, A.C.; Academia Mexicana de Ciencias, A.C.; Academia Nacional de Medicina, A.C.; Fundación ICA, A.C.

**Autoridades educativas gubernamentales (20%):**

Secretaría de Educación Pública.

- Ceneval, A.C.®, EXANI-I®, EXANI-II® son marcas registradas ante la Secretaría de Comercio y Fomento Industrial con el número 478968 del 29 de julio de 1994. EGEL®, con el número 628837 del 1 de julio de 1999, y EXANI-III®, con el número 628839 del 1 de julio de 1999.
- Inscrito en el Registro Nacional de Instituciones Científicas y Tecnológicas del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología con el número 506 desde el 10 de marzo de 1995.
- Organismo Certificador acreditado por el Consejo de Normalización y Certificación de Competencia Laboral (CONOCER) (1998).
- Miembro de la International Association for Educational Assessment.
- Miembro de la European Association of Institutional Research.
- Miembro del Consortium for North American Higher Education Collaboration.
- Miembro del Institutional Management for Higher Education de la OCDE.



CENTRO NACIONAL  
DE EVALUACIÓN PARA  
LA EDUCACIÓN SUPERIOR, A.C.

CENEVAL®

Dirección del Área de los EGEL

ENERO • 2017